Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

**Павлик Катерина Пилипівна**

УДК 512.536

# ТОПОЛОГІЧНІ НАПІВГРУПИ МАТРИЧНИХ ОДИНИЦЬ І $\lambda$–РОЗШИРЕННЯ БРАНДТА ТОПОЛОГІЧНИХ НАПІВГРУП

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 2007

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача Національної академії наук України.

**Науковий керівник**: кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
**Гутік Олег Володимирович**,
доцент кафедри геометрії і топології
Львівського національного університету імені Івана Франка.

**Офіційні опоненти**: доктор фізико-математичних наук, професор
**Протасов Ігор Володимирович**,
провідний науковий співробітник кафедри дослідження операцій
Київського національного університету імені Тараса Шевченка;

доктор фізико-математичних наук, професор
**Андрійчук Василь Іванович**,
професор кафедри алгебри і логіки
Львівського національного університету імені Івана Франка.

**Провідна установа**: Інститут математики НАН України, м. Київ.

Захист відбудеться "___" ____________ 2007 року о _____ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 35.051.07 у Львівському національному університеті імені Івана Франка за адресою: 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці Львівського національного університету імені Івана Франка за адресою: м. Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розісланий "____" _______________ 2007 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Остудін Б. А.

# ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Витоки теорії топологічних напівгруп сягають робіт 50-х років А. Д. Уоллеса, Ш. Шварца, К. Нумакури, Р. Коха і стосуються в основному дослідження структури компактних топологічних напівгруп.

Одне з центральних місць в теорії напівгруп і теорії топологічних напівгруп займає біциклічна напівгрупа, тобто напівгрупа породжена двома елементами $p$ і $q$, для яких виконується співвідношення $pq=1$. Ще в часи становлення алгебраїчної теорії напівгруп О. Андерсен[1] довів, що $(0\text{-})$ проста напівгрупа є цілком $(0\text{-})$ простою тоді й лише тоді, коли вона не містить біциклічну напівгрупу. Використовуючи біциклічні розширення напівгруп, у 1958 р. Р. Брак показав, що кожна напівгрупа ізоморфно занурюється у просту напівгрупу і в 1960 р. Н. Рейлі описав структуру біпростих та простих $\omega$-регулярних напівгруп. Л. Андерсон, Р. Гантер і Р. Кох[2] показали, що біциклічна напівгрупа не занурюється у стабільну, а отже і у компактну топологічну напівгрупу. К. Еберхарт і Дж. Селден[3] довели, що на біциклічній напівгрупі існує лише дискретна напівгрупова гаусдорфова топологія та описали замикання біциклічної напівгрупи, як піднапівгрупи локально компактної топологічної інверсної напівгрупи. М. Бертман і Т. Вест[4] показали, що на біциклічній напівгрупі, як на напівтопологічній існує лише дискретна гаусдорфова топологія. Певним "ортогональним" аналогом біциклічної напівгрупи є нескінченна напівгрупа матричних одиниць. Тому природно виникає питання: *чи нескінченна напівгрупа матричних одиниць має подібні топологічні властивості до біциклічної напівгрупи*?

У 20-их роках XX-го століття П. С. Александров та П. С. Урисон ввели поняття $H$-замкненого простору і вказали критерій $H$-замкненості топологічних просторів. Гаусдорфовий топологічний простір називається *$H$-замкненим*, якщо він замкнений у кожному гаусдорфовому просторі, що містить його як підпростір. Питання про те, коли тополого-алгебраїчний об'єкт $H$–замкнений є класичним в топологічній алгебрі. У 1946 р. Д. А. Райков[5] вказав необхідні та достатні умови $H$-замкненості топологічних груп. У 1969 р. Дж. Степп[6] показав, що кожна локально компактна топологічна напівгрупа є щільною піднапівгрупою деякої $H$-замкненої топологічної напівгрупи, а в 2003 р. О. Равський[7] вказав достатні умови, коли комутативна топологічна група є $H$-замкненою в класі паратопологічних груп.

У 1940 р. М. Катетов[8] показав, що неперервний образ $H$-замкненого топологічного простору є $H$-замкненим простором, тобто кожен $H$-замкнений простір є абсолютно $H$-замкненим. У категоріях топологічних груп, топологічних інверсних напівгруп та топологічних напівгруп існують $H$-замкнені не абсолютно

---

[1] *Andersen O.* Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen: PhD Thesis. – Hamburg, 1952.
[2] *Anderson L. W., Hunter R. P., Koch R. J.* Some results on stability in semigroups// Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. **117**, № 5. – P. 521-529.
[3] *Eberhart C., Selden J.* On the closure of the bicyclic semigroup// Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. **119**. – P. 115-126.
[4] *Bertman M. O., West T. T.* Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups// Proc. Roy. Irish Acad. – 1976. – Vol. **A76**: 21-23. – P. 219-226.
[5] *Райков Д. А.* О полноте топологических групп// Изв. Акад. Наук СССР. – 1946. – Т. **10**. – С. 513-528.
[6] *Stepp J. W.* A note on maximal locally compact semigroups// Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. **20**, №1. – P. 251-253.
[7] *Ravsky O.V.* On $H$-closed paratopological groups// Вісник Львів. Ун-ту, Серія мех.-мат. – 2003. – Т. **61**. – С. 172-179.
[8] *Katětov M.* Über $H$-abgeschlossene und bikompakte Raume// Časopis Pěst. Mat. Fys. – 1940. – Band. **69**. – S. 36-49.

$H$-замкнені об'єкти. Питання про те, коли топологічна група є абсолютно $H$-замкненою не розв'язане повністю. У 1998 р. Д. Дікранян та В. Успенський[9] показали, що абсолютна $H$-замкненість в класі топологічних груп зберігається декартовими добутками та замкненими центральними підгрупами. Дж. Степп[10] знайшов критерій абсолютної $H$-замкненості дискретних напівграток і поставив проблему "чи кожна $H$-замкнена топологічна напівгратка є абсолютно $H$-замкненою?", відповідь на яку залишається відкритою до цього часу.

Оскільки критерію $H$-замкненості чи абсолютної $H$-замкненості топологічних напівгруп не знайдено, то актуальним є *відшукання тополого-алгебраїчних розширень топологічних напівгруп, які зберігають $H$-замкненість та абсолютну $H$-замкненість*.

Отримані у дисертації результати тісно пов'язані ще з однією задачею. Питання про те, коли фактор-напівгрупа Ріса топологічної напівгрупи по замкненому ідеалу є топологічною напівгрупою розглядалось багатьма спеціалістами в теорії топологічних напівгруп. Так, зокрема, А. Д. Уоллес[11] показав, що фактор-напівгрупа Ріса компактної топологічної напівгрупи по замкненому ідеалу є топологічною напівгрупою. У 1971 р. Дж. Лоусон та В. Медісон[12] узагальнили результат Уоллеса на локально компактні $\sigma$-компактні топологічні напівгрупи. О. Гутік зауважив, що фактор-напівгрупа Ріса топологічної напівгрупи по компактному ідеалу є також топологічною напівгрупою. У 2005 р. О. Гринів[13] показала, що результат Лоусона-Медісона не поширюється на локально компактні топологічні напівгрупи. Природно виникає питання: *чи фактор-напівгрупа Ріса абсолютно $H$-замкненої топологічної напівгрупи по абсолютно $H$-замкненому ідеалу є топологічною напівгрупою*?

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Тематика дисертаційної роботи пов'язана з тематикою наукових досліджень кафедри геометрії та топології механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка та відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача Національної академії наук України. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми № 0103U000127 "Алгебраїчні та комбінаторні методи в матричних кільцях, скінченно-параметричних групах Лі та топологічних напівгрупах".

**Мета і завдання дослідження.** У зв'язку з вищезгаданими задачами виникла необхідність вивчення алгебраїчних і топологічних властивостей напівгрупи матричних одиниць та топологічних $\lambda$-розширень Брандта.

*Об'єктом* дослідження є алгебраїчно-топологічні структури: напівгрупа матричних одиниць та топологічні $\lambda$-розширення Брандта топологічних напівгруп, а *предметом досліджень* – їх алгебраїчні та топологічні властивості, структура та топологізації.

*Метою* дисертаційної роботи є: побудова компактних та зліченно компактних топологій на нескінченній напівгрупі матричних одиниць, що перетворюють її у

---

9 *Dikranjan D. N., Uspenskij V. V.* Categorically compact topological groups// J. Pure Appl. Algebra. - 1998. - Vol. **126**. - P. 149-168.
10 *Stepp J. W.* Algebraic maximal semilattices// Pacific J. Math. – 1975. – Vol. **58**, № 1. – P. 243-248.
11 *Wallace A. D.* The structure of topological semigroups// Bull. Amer. Math. Soc. – 1955. – Vol. **61**. – P. 95-112.
12 *Lawson J. D., Madison B. L.* On congruences and cone// Math. Z. – 1971. – Vol. **120**. – P. 18-24.
13 *Hryniv O.* Quotient topologies on topological semilattices// Mat. Studii. – 2005. – Vol. **23**, № 2. – P. 136-142.

напівтопологічну напівгрупу; дослідження існування топологічних занурень нескінченних топологічних напівгруп матричних одиниць у компактні топологічні напівгрупи; побудова мінімальних (інверсних) напівгрупових топологій на напівгрупі матричних одиниць; описання структури компактних $0$-простих топологічних інверсних напівгруп; описання будови компактифікацій Бора нескінченних топологічних напівгруп матричних одиниць та топологічних $\lambda$-розширень Брандта топологічних напівгруп; вивчення збереження (абсолютної) $H$-замкненості топологічними $\lambda$-розширеннями Брандта топологічних напівгруп; побудова прикладу абсолютно $H$-замкненої топологічної напівгрупи $S$ з абсолютно $H$-замкненим ідеалом $I$ таких, що фактор-напівгрупа Ріса $S/I$ не є топологічною напівгрупою.

**Наукова новизна отриманих результатів**. Усі отримані результати є новими. У дисертаційній роботі:

1. Описано усі псевдо-компактні топології на нескінченній напівгрупі матричних одиниць, що перетворюють її у напівтопологічну напівгрупу. Доведено, що на нескінченній напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$ не існує напівгрупової топології $\tau$, такої, що $(B_\lambda,\tau)$ занурюється у компактну топологічну напівгрупу. Доведено, що нескінченна напівгрупа матричних одиниць є алгебраїчно $h$-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп. Побудовано напівгрупові абсолютно $H$-замкнені мінімальні та мінімальні інверсні гаусдорфові топології на нескінченній напівгрупі матричних одиниць.

2. Доведено, що топологічна інверсна напівгрупа $S$ є (абсолютно) $H$-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп тоді і тільки тоді, коли довільне її топологічне $\lambda$-розширення Брандта в класі топологічних інверсних напівгруп є (абсолютно) $H$-замкненою напівгрупою. Для довільного нескінченного кардинала $\lambda$ побудовано напівгрупові топології на $\lambda$-розширеннях Брандта топологічних напівгруп, що зберігають $H$-замкненість та абсолютну $H$-замкненість.

3. Описано структуру компактних $0$-простих топологічних інверсних напівгруп. Описані компактифікації Бора нескінченних напівгруп матричних одиниць та топологічних $\lambda$-розширень Брандта топологічних напівгруп для нескінченного кардинала $\lambda$.

4. Побудовано приклад зліченної абсолютно $H$-замкненої метризовної інверсної топологічної напівгрупи $S$ з абсолютно $H$-замкненим ідеалом $I$ такої, що фактор-напівгрупа Ріса $S/I$ не є топологічною напівгрупою.

**Практичне значення отриманих результатів.** Робота має теоретичний характер. Отримані результати та розвинуті у ній методи можна застосувати для подальших досліджень у топологічній алгебрі та функціональному аналізі. Матеріали дисертації можуть бути використані при читанні спеціальних курсів у Львівському національному університеті та Київському національному університеті.

**Особистий внесок здобувача.** Усі наукові результати, які входять у дисертацію, отримані здобувачем самостійно. Деякі з результатів опубліковані у співавторстві з О. В. Гутіком. З цих публікацій у дисертацію внесено лише результати, отримані автором самостійно. У спільній статті [1] О. В. Гутіку належать постановка задач, обговорення та аналіз отриманих результатів У роботі [2] автору належать леми 6, 8, твердження 3, 5, 7, 9, 11, теореми 10, 12, 14, 16, 17, приклад 15 та наслідки 4, 13. У роботі [4] автору не належать твердження 1, теорема 2 та наслідок 3. У роботі [5] автору не належать твердження 1, теореми 1, 12, та приклад 1.

**Апробація результатів дисертації.** Результати отримані в дисертаційній роботі доповідалися та обговорювалися на Третій міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Суми, 2001); на $5th$ International Algebraic Conference in Ukraine (Одеса, 2005); на Summer School on General Algebra and Ordered Sets (Radějov, Czech Republic, 2006); на III Sympozjum matematycznych i Informatycznych Kól Naukowych. Topologia (Krakow, Poland, 2006); на Другій літній школі з алгебри і топології (Долина, 2004); на Третій літній школі з алгебри, аналізу і топології (Козьова, 2005); на XVII відкритій науково-технічній конференції молодих науковців і спеціалістів фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2001); на Конференції молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача (Львів, 2005); на семінарі «Топологія і застосування» у Львівському національному університеті імені Івана Франка (Львів, 2001); на Львівському міському алгебраїчному семінарі (Львів, 2003, 2004, 2006); на семінарі відділу алгебри Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2003, 2004, 2005, 2006); на математичному семінарі Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 2006).

**Публікації.** Результати дисертації опубліковані у 13 роботах [1 - 13], з яких 5 статей у виданнях з переліку затвердженого ВАК України.

**Структура і об'єм дисертації.** Дисертація складається з вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури. Повний обсяг роботи – 117 сторінок. Список використаної літератури займає 11 сторінок і містить 121 найменування.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику кандидату фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику, доценту кафедри геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка, Олегу Володимировичу Гутіку за постановку задач і допомогу у роботі над дисертацією.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Коротко охарактеризуємо зміст роботи.

У ***вступі*** обґрунтована актуальність дисертаційного дослідження, визначена мета і об'єкти дослідження. Основна частина дисертації поділена на 3 розділи.

У *першому підрозділі* ***розділу 1 "Огляд літератури, мотивація досліджень та допоміжні відомості"*** подається огляд літератури, у якому коротко висвітлено історію розвитку теорії топологічних напівгруп та формулюються основні задачі, що розв'язуються у даній роботі. *У другому підрозділі* першого розділу викладено відомі результати з алгебраїчної теорії напівгруп, загальної топології та теорії топологічних напівгруп, які використовуються у дисертації.

Напівгрупа $B_\lambda(S) = I_\lambda \times S^1 \times I_\lambda \cup \{0\}$, де $S$ – напівгрупа з одиницею, $I_\lambda$ – множина потужності $\lambda \geq 2$, і напівгрупова операція визначена так:

$$(\alpha, a, \beta)\cdot(\gamma, b, \delta) = \begin{cases} (\alpha, ab, \delta), & \text{якщо } \beta = \gamma \\ 0, & \text{якщо } \beta \neq \gamma \end{cases}$$

і $(\alpha,a,\beta)\cdot 0 = 0\cdot(\alpha,a,\beta) = 0\cdot 0 = 0$ для довільних $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in I_\lambda$, $a,b \in S^1$, називається *$\lambda$–розширенням Брандта напівгрупи* $S$. У випадку, якщо $S$ тривіальна напівгрупа, то напівгрупа $B_\lambda = B_\lambda(S)$ називається *напівгрупою матричних одиниць*.

***Розділ 2 "Топологічні напівгрупи матричних одиниць"*** складається з трьох підрозділів і присвячений вивченню топологічних властивостей нескінченної напівгрупи матричних одиниць. У *першому підрозділі* другого розділу досліджуються топологічні властивості напівгрупи матричних одиниць як напівтопологічної напівгрупи.

Наступне твердження є аналогом теореми Бертман–Веста[4] для нескінченної напівгрупи матричних одиниць про те, що кожна гаусдорфова топологія на біциклічній напівгрупі, яка перетворює її у напівтопологічну, є дискретною.

***Лема 2.1.1.*** *Нехай $\lambda \geq \omega$ і $\tau$ – топологія на $B_\lambda$ така, що $(B_\lambda,\tau)$ – напівтопологічна напівгрупа. Тоді довільний ненульовий елемент напівгрупи $B_\lambda$ є ізольованою точкою в $(B_\lambda,\tau)$.*

М. О. Бертман і Т. Т. Вест[4] показали, що біциклічна напівгрупа занурюється у компактні напівтопологічні напівгрупи. На нескінченній напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$ побудовано таку топологію $\tau_c$, що $(B_\lambda,\tau_c)$ є компактною напівтопологічною інверсною напівгрупою.

***Приклад 2.1.1.*** Нехай $\lambda$ - нескінченний кардинал. Означимо на напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$ топологію $\tau_c$ так:

а) усі ненульові елементи напівгрупи $B_\lambda$ є ізольованими точками в $B_\lambda$;

б) $\mathcal{B}(0) = \{A \subseteq B_\lambda : 0 \in A \text{ і } | B_\lambda \setminus A | < \omega\}$ – база топології $\tau_c$ у точці $0 \in B_\lambda$.

Тоді $(B_\lambda,\tau_c)$ - компактна гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа.

А. Б. Паалман-де-Міранда[14] показала, що нуль компактної цілком $0$-простої топологічної напівгрупи $S$ є ізольованою точкою в $S$. Напівгрупа $(B_\lambda,\tau_c)$ є прикладом компактної цілком $0$-простої напівтопологічної інверсної напівгрупи з неізольованим нулем.

Наступна теорема описує усі компактні, зліченно-компактні, та псевдо-компактні топології $\tau$ на $B_\lambda$ такі, що перетворюють її у напівтопологічну напівгрупу.

***Теорема 2.1.1.*** *Нехай $\lambda \geq \omega$ і $\tau$ – топологія на $B_\lambda$ така, що $(B_\lambda,\tau)$ – напівтопологічна напівгрупа. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

*1) $(B_\lambda,\tau)$ – компактна напівтопологічна напівгрупа;*

*2) $(B_\lambda,\tau)$ – зліченно-компактна напівтопологічна напівгрупа;*

*3) $(B_\lambda,\tau)$ – псевдо-компактна напівтопологічна напівгрупа;*

*4) $(B_\lambda,\tau)$ топологічно ізоморфна напівгрупі $(B_\lambda,\tau_c)$.*

Оскільки на біциклічній напівгрупі існує лише дискретна напівгрупова топологія, то на ній не існує компактних напівгрупових топологій. Аналогічний результат отримуємо і для нескінченної напівгрупи матричних одиниць:

---

[14] *Paalman-de-Miranda A. B.* Topological semigroups// Mathematical Centre Tracts. – Vol. **11**. – Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964.

***Наслідок 2.2.1.*** *На нескінченній напівгрупі матричних одиниць не існує компактної* (*зліченно-компактної, псевдо-компактної*) *напівгрупової топології.*

У *підрозділі 2.2* досліджується занурення нескінченної топологічної напівгрупи матричних одиниць у компактні топологічні напівгрупи. Л. Андерсон, Р. Гантер і Р. Кох[2] довели, що біциклічна напівгрупа не занурюється в стабільну напівгрупу, а отже і в компактну топологічну напівгрупу. Дж. Гільдебрант і Р. Кох[15] показали, що довільна $\Gamma$-компактна топологічна напівгрупа не містить біциклічної напівгрупи. Постає природне запитання: *чи існує компактна топологічна напівгрупа, що містить нескінченну напівгрупу матричних одиниць* $B_\lambda$? Наступна теорема дає негативну відповідь на це питання.

***Теорема 2.2.1.*** *Якщо* $\lambda \geq \omega$, *то на напівгрупі матричних одиниць* $B_\lambda$ *не існує напівгрупової топології* $\tau$, *такої що* $(B_\lambda, \tau)$ *занурюється у компактну топологічну напівгрупу.*

Напівгруповий гомоморфізм $h : S \to T$ називають *анулюючим*, якщо існує елемент $c$ в $T$ такий, що $h(a) = c$ для кожного $a$ з $S$. Виконується

***Теорема 2.2.2.*** *Нехай* $\lambda \geq \omega$. *Тоді довільний неперервний гомоморфізм топологічної напівгрупи матричних одиниць* $B_\lambda$ *у компактну топологічну напівгрупу є анулюючим.*

*Компактифікація Бора топологічної напівгрупи* $S$ – це пара $(\beta, B(S))$ така, що $B(S)$–компактна топологічна напівгрупа, $\beta : S \to B(S)$ – неперервний гомоморфізм, і якщо $g : S \to T$ – неперервний гомоморфізм з $S$ у компактну топологічну напівгрупу $T$, тоді існує єдиний неперервний гомоморфізм $f : B(S) \to T$ такий, що діаграма

$$\begin{array}{lll} S & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & B(S) \\ \downarrow g & \swarrow f & \\ T & & \end{array}$$

є комутативною.

Як наслідок, з теореми 2.2.2 отримуємо описання компактифікації Бора нескінченної топологічної напівгрупи матричних одиниць:

***Наслідок 2.2.2.*** *Компактифікація Бора нескінченної топологічної напівгрупи матричних одиниць є тривіальною напівгрупою.*

У *третьому підрозділі* 2-го розділу досліджуються напівгрупові топологізації нескінченної напівгрупи матричних одиниць.

Нехай $\mathcal{S}$ – клас топологічних напівгруп. Топологічна напівгрупа $S$ з класу $\mathcal{S}$ називається $H$*-замкненою у класі* $\mathcal{S}$, якщо вона є замкненою піднапівгрупою у кожній напівгрупі $T$ з класу $\mathcal{S}$, що містить $S$ як піднапівгрупу. Топологічна напівгрупа $S$ з класу $\mathcal{S}$ називається *абсолютно* $H$*-замкненою у класі* $\mathcal{S}$, якщо кожний неперервний гомоморфний образ напівгрупи $S$ у напівгрупу $T$ з класу $\mathcal{S}$ є $H$-замкненою напівгрупою в класі $\mathcal{S}$. Напівгрупа $S$ називається *алгебраїчно замкненою у класі* $\mathcal{S}$, якщо напівгрупа $S$ з довільною напівгруповою топологією

[15] *Hildebrant J. A., Koch R. J.* Swelling actions of $\Gamma$-compact semigroups// Semigroup Forum – 1988. – Vol. **33**, № 1. – P. 65-85.

на ній є $H$-замкненою у класі $\mathcal{S}$. Напівгрупа $S$ називається *алгебраїчно $h$-замкненою у класі $\mathcal{S}$*, якщо напівгрупа $S$ з дискретною топологією $d$ є абсолютно $H$-замкненою у класі $\mathcal{S}$ і $(S,d)\in\mathcal{S}$. Якщо ж $\mathcal{S}$ – клас усіх топологічних напівгруп, то напівгрупу $S$ називають *$H$-замкненою, абсолютно $H$-замкненою, алгебраїчно замкненою* та *алгебраїчно $h$-замкненою*, відповідно.

Кожна компактна напівгрупа є абсолютно $H$-замкнена, абсолютно $H$-замкнена напівгрупа є $H$-замкнена, алгебраїчно $h$-замкнена напівгрупа є абсолютно $H$-замкнена, алгебраїчно замкнена напівгрупа є $H$-замкнена, алгебраїчно $h$-замкнена напівгрупа є алгебраїчно замкнена.

$H$-замкнені, абсолютно $H$-замкнені та алгебраїчно $h$-замкнені топологічні напівгрупи були введені Дж. Степпом[6,10].

Оскільки напівгрупа матричних одиниць є конгруенц-простою, то з теореми 2.3.1 слідує

***Наслідок 2.3.5.*** *Для довільного кардинала $\lambda\geq 2$ напівгрупа $B_\lambda$ є алгебраїчно $h$-замкненою у класі топологічних інверсних напівгруп.*

Побудовано приклад 2.3.1, з якого слідує, що нескінченна напівгрупа матричних одиниць $B_\omega$ з дискретною топологією не є $H$-замкненою напівгрупою в класі локально компактних топологічних напівгруп.

Мінімальні топологічні групи були введені у 70-их роках XX-го століття незалежно Д. Дойтчіновим[16] і Р. Стефенсоном[17] для теорії мінімальних топологічних просторів, яка активно розвивалася у той час. Раніше, у 50-их роках, мінімальність у кільцях з подільностями вивчав Л. Нахбін[18], і у більш загальному розумінні – у топологічних алгебрах – Б. Банашевський[19].

***Означення 2.3.1.*** Гаусдорфова топологічна (інверсна) напівгрупа $(S,\tau)$ називається *мінімальною* (*інверсною*), якщо жодна гаусдорфова напівгрупова (інверсна) топологія на $S$ не міститься строго у $\tau$. Якщо $(S,\tau)$ – мінімальна топологічна (інверсна) напівгрупа, тоді $\tau$ називається *мінімальною напівгруповою* (*інверсною*) *топологією*.

Очевидно, що кожна найслабша гаусдорфова напівгрупова топологія на напівгрупі є мінімальною. У той же час існують напівгрупи з мінімальними напівгруповими топологіями, жодна з яких не є найслабшою напівгруповою гаусдорфовою. Природно виникає наступне питання:

***Питання 2.3.1*** (Т. О. Банах). *Чи для довільного нескінченного кардинала $\lambda$ існує мінімальна* (*інверсна*) *напівгрупова топологія на напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$*?

Для довільних $\alpha,\beta\in I_\lambda$ позначимо

$$V_\alpha=B_\lambda\setminus\{(\alpha,\gamma)\mid\gamma\in I_\lambda\},\qquad H_\beta=B_\lambda\setminus\{(\gamma,\beta)\mid\gamma\in I_\lambda\}.$$

Означимо

$$U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}=\bigcap_{i=1}^{n}V_{\alpha_i},\quad U_{\beta_1,\ldots,\beta_m}=\bigcap_{j=1}^{m}H_{\beta_j},\quad U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_m}=U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\bigcap U_{\beta_1,\ldots,\beta_m},$$

---

[16] *Doïtchinov D.* Produits de groupes topologiques minimaux// Bull. Sci. Math. – 1972. – Vol. **97**, № 2. – P. 59-64.
[17] *Stephenson R. M.* Minimal topological groups// Math. Ann. – 1971. – Vol. **192**. – P. 193-195.
[18] *Nachbin L.* On strictly minimal topological division rings// Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – Vol. **55**. – P. 1128-1136.
[19] *Banaschewski B.* Minimal topological algebras// Math. Ann. – 1974. – Vol. **211**. – P. 107-114.

де $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m \in I_\lambda$, $n,m\in\mathbb{N}$. Нехай

$$\mathcal{B}_{mv}=\{U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\mid \alpha_1,\ldots,\alpha_n\in I_\lambda, n\in\mathbb{N}\}\bigcup\{(\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta\in I_\lambda\},$$
$$\mathcal{B}_{mh}=\{U_{\beta_1,\ldots,\beta_m}\mid \beta_1,\ldots,\beta_m\in I_\lambda, m\in\mathbb{N}\}\bigcup\{(\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta\in I_\lambda\},$$
$$\mathcal{B}_{mi}=\{U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_m}\mid \alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m\in I_\lambda, n,m\in\mathbb{N}\}\bigcup\{(\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta\in I_\lambda\}.$$

Сім'ї $\mathcal{B}_{mv}$, $\mathcal{B}_{mh}$ і $\mathcal{B}_{mi}$ є базами топологій $\tau_{mv}$, $\tau_{mh}$ і $\tau_{mi}$ на $B_\lambda$, відповідно.

***Теорема 2.3.2.*** *Нехай $\lambda$ - нескінченний кардинал. Тоді:*

*1) $\tau_{mv}$ - мінімальна напівгрупова топологія на $B_\lambda$;*

*2) $\tau_{mh}$ - мінімальна напівгрупова топологія на $B_\lambda$;*

*3) $\tau_{mi}$ - найслабша, а отже мінімальна, напівгрупова інверсна топологія на $B_\lambda$.*

***Теорема 2.3.3.*** *Нехай $\lambda\geq\omega$ і $\tau_1$, $\tau_2$ - напівгрупові топології на напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$ такі, що $\tau_{mv}\subseteq\tau_1\subseteq\tau_{mi}$ і $\tau_{mh}\subseteq\tau_2\subseteq\tau_{mi}$. Тоді $\tau_1=\tau_{mv}$ або $\tau_1=\tau_{mi}$, і $\tau_2=\tau_{mh}$ або $\tau_2=\tau_{mi}$.*

***Наслідок 2.3.4.*** *Нехай $\lambda$ - нескінченний кардинал. Тоді $(B_\lambda,\tau_{mv})$, $(B_\lambda,\tau_{mh})$ і $(B_\lambda,\tau_{mi})$ - абсолютно $H$-замкнені топологічні напівгрупи.*

***Теорема 2.3.5.*** *Для кожного кардинала $\lambda>\omega$ довільний неперервний гомоморфізм напівгрупи $(B_\lambda,\tau_{mv})$ $[(B_\lambda,\tau_{mh})$, $(B_\lambda,\tau_{mi})]$ у топологічну напівгрупу, простір якої є точково-зліченного типу, є анулюючим.*

***Теорема 2.3.6.*** *Для кожного нескінченного кардинала $\lambda$ довільний неперервний гомоморфізм топологічної напівгрупи $(B_\lambda,\tau_{mv})$ $[(B_\lambda,\tau_{mh})$, $(B_\lambda,\tau_{mi})]$ у локально компактну топологічну напівгрупу $S$ є анулюючим.*

У ***розділі 3 "Топологічні $\lambda$-розширення Брандта топологічних напівгруп"*** досліджується збереження $H$-замкнeності та абсолютної $H$-замкнeності топологічними $\lambda$-розширеннями Брандта топологічних напівгруп.

Конструкція $\lambda$–розширення Брандта є узагальненням групоїдів Брандта, вивчення яких було започатковане у роботах Г. Брандта[20] у 20-х роках XX-го століття. Цілком $0$-проста інверсна напівгрупа ізоморфна групоїду Брандта, тобто є $\lambda$-розширенням над групою. У 1989 р. Дж. Гауї[21] запропонував конструкцію занурення напівгруп у нільпотентно-породжені напівгрупи індексу нільпотентності $2$. О. Гутік[22] узагальнив конструкцію Гауї для довільного кардинала $\lambda\geq 2$ і топологізував її. Отриману напівгрупу було названо $\lambda$-розширенням Брандта $B_\lambda(S)$ напівгрупи $S$.

***Означення 3.1.2.*** Нехай $\lambda$ – кардинал, $\lambda\geq 2$, $\mathcal{S}$ – клас топологічних напівгруп, $(S,\tau)\in\mathcal{S}$. Якщо $\tau_B$ топологія на $B_\lambda(S)$ така, що

1) $(B_\lambda(S),\tau_B)\in\mathcal{S}$,

2) $\tau_B|_{(\alpha,S^1,\alpha)}=\tau$ для деякого $\alpha\in I_\lambda$,

---

[20] *Brandt H.* Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes// Math. Ann. – 1927. – Band. **96**. – S. 360-366.

[21] *Howie J. M.* Embedding semigroups in nilpotent-generated semigroups// Math. Slovača. – 1989. – Vol. **39**. – P. 47-54.

[22] *Гутік О. В.* Про напівгрупу Гауї// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. **42**, № 4. – С. 127-132.

то $(B_\lambda(S),\tau_B)$ називається *топологічним* $\lambda$*-розширенням Брандта напівгрупи* $(S,\tau)$ *у класі* $\mathcal{S}$. Якщо $\mathcal{S}$ співпадає з класом усіх топологічних напівгруп, тоді $(B_\lambda(S),\tau_B)$ називається *топологічним* $\lambda$*-розширенням Брандта напівгрупи* $(S,\tau)$.

У *першому підрозділі третього розділу* вивчається питання збереження $H$-замкненості топологічними $\lambda$-розширеннями Брандта топологічних напівгруп.

Виконується

***Теорема 3.1.3.*** *Нехай* $S$ *– топологічна інверсна напівгрупа. Тоді наступні умови еквівалентні:*

*1)* $S$ *–* $H$*-замкнена напівгрупа в класі топологічних інверсних напівгруп,*

*2) існує кардинал* $\lambda \geq 2$ *такий, що довільне топологічне* $\lambda$*-розширення Брандта напівгрупи* $S$ *є* $H$*-замкненим у класі топологічних інверсних напівгруп,*

*3) для кожного кардинала* $\lambda \geq 2$ *довільне топологічне* $\lambda$*-розширення Брандта напівгрупи* $S$ *є* $H$*-замкненим у класі топологічних інверсних напівгруп.*

З теореми 3.1.3 випливає

***Наслідок 3.1.2.*** *Нехай* $S$ *– інверсна напівгрупа. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

*1)* $S$ *– алгебраїчно замкнена напівгрупа в класі топологічних інверсних напівгруп;*

*2) існує кардинал* $\lambda \geq 2$ *такий, що* $\lambda$*-розширення Брандта* $B_\lambda(S)$ *напівгрупи* $S$ *є алгебраїчно замкненою напівгрупою в класі топологічних інверсних напівгруп;*

*3) для кожного кардинала* $\lambda \geq 2$, $\lambda$*-розширення Брандта* $B_\lambda(S)$ *напівгрупи* $S$ *є алгебраїчно замкненою напівгрупою в класі топологічних інверсних напівгруп.*

Оскільки нескінченна дискретна напівгрупа матричних одиниць не є $H$-замкненою, то топологічні $\lambda$-розширення Брандта не зберігають $H$-замкненість для $\lambda \geq \omega$. Тому природно виникає питання: *чи існують напівгрупові топології на* $\lambda$*-розширеннях Брандта топологічних напівгруп, що зберігають* $H$*-замкненість в класі топологічних напівгруп*. Відповідь на це питання дає теорема 3.1.4.

Нехай $(S,\tau)$ – топологічна напівгрупа і $\lambda$ – нескінченний кардинал. Для довільних $\alpha,\beta \in I_\lambda$ означимо

$$V_\alpha = B_\lambda(S) \setminus \{(\alpha,a,\gamma) \mid \gamma \in I_\lambda, a \in S^1\},\ H_\beta = B_\lambda(S) \setminus \{(\gamma,a,\beta) \mid \gamma \in I_\lambda, a \in S^1\}.$$

Нехай

$$U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}, \quad U_{\beta_1,\ldots,\beta_m} = \bigcap_{j=1}^{m} H_{\beta_j}, \quad U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_m} = U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \bigcap U_{\beta_1,\ldots,\beta_m},$$

де $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m \in I_\lambda$, $n,m \in \mathbb{N}$.

Нехай $\mathcal{B}$ – база топології топологічної напівгрупи $(S,\tau)$. Кожна з сімей

$$\mathcal{B}_{mv} = \{U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \mid \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in I_\lambda, n \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(\alpha,V,\beta) \mid V \in \mathcal{B}, \alpha,\beta \in I_\lambda\},$$

$$\mathcal{B}_{mh} = \{U_{\beta_1,\ldots,\beta_m} \mid \beta_1,\ldots,\beta_m \in I_\lambda, m \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(\alpha,V,\beta) \mid V \in \mathcal{B}, \alpha,\beta \in I_\lambda\},$$

$$\mathcal{B}_{mi} = \{U^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_m} \mid \alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_m \in I_\lambda, n,m \in \mathbb{N}\} \bigcup \{(\alpha,V,\beta) \mid V \in \mathcal{B}, \alpha,\beta \in I_\lambda\}$$

визначає бази топологій $\tau_{mv}(S)$, $\tau_{mh}(S)$ і $\tau_{mi}(S)$ відповідно, на напівгрупі $B_\lambda(S)$.

***Твердження 3.1.5.*** *Нехай* $\lambda$ *– нескінченний кардинал і* $(S,\tau)$ *– топологічна напівгрупа. Тоді* $(B_\lambda(S),\tau_{mv}(S))$, $(B_\lambda(S),\tau_{mh}(S))$, $(B_\lambda(S),\tau_{mi}(S))$ *– топологічні напівгрупи, а якщо* $(S,\tau)$ *– топологічна інверсна напівгрупа, то* $(B_\lambda(S),\tau_{mi}(S))$ *– топологічна інверсна напівгрупа.*

***Теорема 3.1.4.*** *Нехай* $\lambda \geq \omega$ *і* $(S,\tau)$ *–* $H$*-замкнена топологічна напівгрупа. Тоді* $(B_\lambda(S),\tau_{mv}(S))$, $(B_\lambda(S),\tau_{mh}(S))$ *і* $(B_\lambda(S),\tau_{mi}(S))$ $H$*-замкнені топологічні напівгрупи.*

У 20-их роках XX-го століття А. К. Сушкевич[23] описав структуру скінченних простих напівгруп. Д. Ріс[24] узагальнив теорему Сушкевича і описав цілком прості напівгрупи за допомогою матричних напівгруп Ріса $\mathcal{M}[G,I,\Lambda;P]$ над групою $G$ з регулярною сендвіч-матрицею $P$. А. Д. Уоллес[25] довів топологічний аналог теореми Ріса-Сушкевича для компактних простих топологічних напівгруп: довільна компактна топологічна напівгрупа містить мінімальний ідеал $K$ і $K$ топологічно ізоморфний топологічній матричній напівгрупі Ріса $\mathcal{M}[G,I,\Lambda;P]$ над топологічною групою $G$ з регулярною сендвіч-матрицею $P$. А. В. Паалман-де-Міранда[14] довела, що довільна $0$-проста компактна топологічна напівгрупа $S$ є цілком $0$-простою. А. Г. Кліфорд[26] описав структуру цілком-простих інверсних груп. В. С. Оуен[27] показав, що якщо $S$ - локально-компактна цілком проста топологічна напівгрупа, тоді $S$ має подібну будову до компактних простих топологічних напівгруп. Природно постає задача: *описати структуру компактних* $0$*-простих топологічних інверсних напівгруп.*

Наступна теорема описує структуру компактних $0$-простих топологічних інверсних напівгруп.

***Теорема 3.1.6.*** *Нехай* $S$ *-* $0$*-проста компактна топологічна інверсна напівгрупа. Тоді існує непорожня скінченна множина* $I_\lambda$ *потужності* $\lambda$ *і компактна топологічна група* $H$ *такі, що напівгрупа* $S$ *топологічно ізоморфна топологічному* $\lambda$*-розширенню Брандта* $B_\lambda(H)$ *групи* $H$ *в класі топологічних інверсних напівгруп. Більше того, напівгрупа* $S$ *гомеоморфна топологічному простору, що є скінченною топологічною сумою топологічно ізоморфних компактних топологічних груп та ізольованої точки.*

***Наслідок 3.1.6.*** *Кожна компактна конгруенц-проста топологічна інверсна напівгрупа з нулем, що містить більше ніж два елементи, ізоморфна скінченній напівгрупі матричних одиниць.*

Структура двоелементних конгруенц-простих напівгруп описана в роботі Є. С. Ляпіна[28].

У 1940 році М. Катетов[8] довів, що $H$-замкненість топологічного простору зберігається неперервними відображеннями, тобто кожен $H$-замкнений

[23] *Suschkewitsch A. K.* Über die endlichen Gruppen// Math. Ann. – 1928. - Band. **99**. – S. 529-547.
[24] *Rees D.* On semi-groups// Proc. Cambridge. Phil. Soc. – 1940. – Vol. **36**. – P. 387-400.
[25] *Wallace A. D.* The Rees-Suschkewitch structure theorem for compact simple semigroups// Proc. Nat. Acad. Sc. – 1956. – Vol. **42.** – P. 430-432.
[26] *Clifford A. H.* Matrix representations of completely simple semigroups// Amer. J. Math. – 1942. – Vol. **64**. – P. 327-342.
[27] *Owen W. S.* The Rees theorem for locally compact semigroups// Semigroup Forum. – 1973. – Vol. **6**. – P. 133-152.
[28] *Ляпин Е. С.* Простые коммутативные ассоциативные системы// Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1950. – Т. **14**, № 3. – С. 275-282.

топологічний простір є абсолютно $H$-замкненим. У класі топологічних груп, топологічних інверсних напівгруп та топологічних напівгруп існують $H$-замкнені але не абсолютно $H$-замкнені об'єкти. Такою, наприклад, в класі топологічних груп та в класі топологічних інверсних напівгруп є адитивна група цілих чисел з дискретною топологією. Питання: "*коли $H$-замкнена топологічна група є абсолютно $H$-замкненою*?" залишається нерозв'язаним повністю. Зокрема, відомо, що властивість бути абсолютно $H$-замкненою топологічною групою зберігається декартовими добутками та замкненими центральними підгрупами. У категорії топологічних напівграток Дж. Степп дав критерій абсолютної $H$-замкненості дискретних напівграток. Залишається також нерозв'язаною проблема Дж. Степпа: "*чи кожна $H$-замкнена топологічна напівгратка є абсолютно $H$-замкненою*?". Тому, актуальним є питання відшукання конструкцій, які б зберігали абсолютну $H$-замкненість у різних класах топологічних напівгруп. Виявляється, що такою конструкцією є топологічне $\lambda$-розширення Брандта топологічної напівгрупи.

У *другому підрозділі третього розділу* вивчається збереження абсолютної $H$-замкненості топологічними $\lambda$-розширеннями Брандта топологічних напівгруп.

З теореми 2.2.2 та наслідку 3.2.1 випливає описання компактифікації Бора топологічних $\lambda$-розширень Брандта топологічних напівгруп для нескінченного кардинала $\lambda$.

***Наслідок 3.2.2.*** *Для $\lambda \geq \omega$ компактифікація Бора топологічного $\lambda$-розширення Брандта $B_\lambda(S)$ топологічної напівгрупи $S$ є тривіальною напівгрупою.*

Виконується

***Теорема 3.2.3.*** *Нехай $S$ - топологічна інверсна напівгрупа. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

*1) $S$ - абсолютно $H$-замкнена топологічна напівгрупа у класі топологічних інверсних напівгруп;*

*2) існує кардинал $\lambda \geq 2$ такий, що довільне топологічне $\lambda$-розширення Брандта $B_\lambda(S)$ напівгрупи $S$ є абсолютно $H$-замкненою топологічною напівгрупою у класі топологічних інверсних напівгруп;*

*3) для довільного кардинала $\lambda \geq 2$ довільне топологічне $\lambda$-розширення Брандта $B_\lambda(S)$ напівгрупи $S$ є абсолютно $H$-замкненою топологічною напівгрупою у класі топологічних інверсних напівгруп.*

Як наслідок отримано аналогічне твердження для алгебраїчно $h$-замкнених напівгруп:

***Теорема 3.2.5.*** *Нехай $S$ - інверсна напівгрупа. Тоді наступні умови є еквівалентними:*

*1) $S$ - алгебраїчно $h$-замкнена напівгрупа у класі топологічних інверсних напівгруп;*

*2) $B_\lambda(S)$ є алгебраїчно $h$-замкненою напівгрупою у класі топологічних інверсних напівгруп для деякого кардинала $\lambda \geq 2$;*

*3) $B_\lambda(S)$ є алгебраїчно $h$-замкненою напівгрупою у класі топологічних інверсних напівгруп для довільного кардинала $\lambda \geq 2$.*

У класі топологічних напівгруп твердження теореми 3.2.3 не виконується, оскільки напівгрупа матричних одиниць з дискретною топологією не є $H$-замкненою.

Природно постає запитання: *чи для кожного кардинала* $\lambda \geq \omega$ *існують напівгрупові абсолютно* $H$*-замкнені топології на* $\lambda$*-розширеннях Брандта* $B_\lambda(S)$ *напівгрупи* $S$ *для абсолютно* $H$*-замкненої топологічної напівгрупи* $S$? Виявляється, що побудовані топології $\tau_{mv}(S)$, $\tau_{mh}(S)$ і $\tau_{mi}(S)$ є такими.

***Теорема 3.2.6.*** *Нехай* $\lambda$ *- нескінченний кардинал і* $(S,\tau)$ *- абсолютно* $H$*-замкнена напівгрупа. Тоді* $(B_\lambda(S),\tau_{mv}(S))$, $(B_\lambda(S),\tau_{mh}(S))$ *і* $(B_\lambda(S),\tau_{mi}(S))$ *- абсолютно* $H$*-замкнені топологічні напівгрупи.*

Побудовано приклад (Приклад 3.1.1) не $H$-замкненої топологічної інверсної напівгрупи $\mathcal{N}$ в класі топологічних інверсних напівгруп такої, що для кожного кардинала $\lambda \geq 2$ існує абсолютно $H$–замкнене топологічне $\lambda$-розширення Брандта напівгрупи $B_\lambda(\mathcal{N})$ (Теорема 3.1.5 і 3.2.7). З цього слідує, що умову 3) в теоремі 3.1.3 (теоремі 3.2.3, відповідно), не можна послабити до наступної:

$3'$) *для кожного кардинала* $\lambda \geq 2$ *існує топологічне* $\lambda$*–розширення Брандта напівгрупи* $S$*, яке є (абсолютно)* $H$*–замкненим, відповідно, у класі топологічних інверсних напівгруп*.

За допомогою топологічного $\lambda$-розширення Брандта топологічної напівгрупи побудовано приклад абсолютно $H$-замкненої зліченної $0$-вимірної метризовної топологічної напівгрупи $S$ з абсолютно $H$-замкненим ідеалом $I$ такої, що фактор-напівгрупа Ріса $S/I$ не є топологічною напівгрупою.

***Приклад 3.2.2***[29]. Нехай $\mathbb{N}$ - множина натуральних чисел, $\{x_n\}$ - зростаюча послідовність в $\mathbb{N}$. Покладемо $\mathbb{N}^* = \{0\} \cup \left\{ 1/n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Означимо напівграткову операцію на $\mathbb{N}^*$ так: $ab = \min\{a,b\}$, де $a,b \in \mathbb{N}^*$. Очевидно, $0$ - нуль напівгратки $\mathbb{N}^*$. Нехай $U_n(0) = \{0\} \cup \left\{ 1/x_k \mid k \geq n \right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Задамо топологію $\tau$ на $\mathbb{N}^*$ так: усі ненульові елементи напівгратки $\mathbb{N}^*$ є ізольованими точками в $\mathbb{N}^*$ і $\mathcal{B}(0) = \{U_n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ - база топології $\tau$ у точці $0 \in \mathbb{N}^*$. Очевидно, що $(\mathbb{N}^*,\tau)$ - зліченна лінійно-впорядкована $\sigma$-компактна локально компактна метризовна топологічна напівгратка і якщо $x_{k+1} > x_k + 1$ для кожного $k \in \mathbb{N}$, то топологічний простір $(\mathbb{N}^*,\tau)$ - не є компактним.

***Теорема 3.2.8.*** *Нехай* $\lambda = \omega$. *Тоді* $(B_\lambda(\mathbb{N}^*),\tau_{mv}(\mathbb{N}^*))$ *і* $(B_\lambda(\mathbb{N}^*),\tau_{mh}(\mathbb{N}^*))$ *- метризовні топологічні напівгрупи.*

За теоремою 3.2.6, множина $\mathcal{J}(\mathbb{N}^*) = \{0\} \cup \{(\alpha,0,\beta) \mid 0 \in \mathbb{N}^*, \alpha,\beta \in I_\lambda\}$ є абсолютно $H$-замкненим ідеалом напівгрупи $B_\lambda(\mathbb{N}^*)$. Виконується

***Теорема 3.2.10.*** *Нехай* $\lambda \geq \omega$ *і* $\{x_n\}$ *- зростаюча послідовність в* $\mathbb{N}$ *така, що* $x_{k+1} > x_k + 1$ *для довільного* $k \in \mathbb{N}$, *і* $(\mathbb{N}^*,\tau)$ *- означена вище топологічна напівгрупа. Тоді топологічні фактор-напівгрупи Ріса*

$$(B_\lambda(\mathbb{N}^*),\tau_{mv}(\mathbb{N}^*))/\mathcal{J}(\mathbb{N}^*) \text{ і } (B_\lambda(\mathbb{N}^*),\tau_{mh}(\mathbb{N}^*))/\mathcal{J}(\mathbb{N}^*)$$

*з фактор - топологіями не є топологічними напівгрупами.*

---

[29] *Gutik O. V., Repovš D.* On linearly ordered $H$-closed topological semilattices// Preprint.

# ВИСНОВКИ

У дисертації автором отримані наступні результати:

1. Описано усі компактні, зліченно компактні, дискретно псевдо-компактні та псевдо-компактні топології $\tau$ на нескінченній напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$ такі, що $(B_\lambda,\tau)$ є напівтопологічною напівгрупою.

2. Доведено, що на нескінченній напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$ не існує компактної (зліченно компактної, псевдо-компактної) напівгрупової топології. Більше того, доведено, що на нескінченній напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$ не існує напівгрупової топології $\tau$, такої що $(B_\lambda,\tau)$ занурюється у компактну топологічну напівгрупу.

3. Доведено, що довільний неперервний гомоморфізм нескінченної топологічної напівгрупи матричних одиниць $B_\lambda$ у компактну топологічну напівгрупу є анулюючим.

4. Описані компактифікації Бора нескінченних напівгруп матричних одиниць та топологічних $\lambda$-розширень Брандта топологічних напівгруп для нескінченного кардинала $\lambda$.

5. Описано структуру компактних $0$-простих топологічних інверсних напівгруп.

6. Доведено, що нескінченна напівгрупа матричних одиниць є алгебраїчно $h$-замкненою у класі топологічних інверсних напівгруп.

7. Побудовано напівгрупові абсолютно $H$-замкнені, мінімальні та мінімальні інверсні гаусдорфові топології на нескінченній напівгрупі матричних одиниць.

8. Доведено, що топологічна інверсна напівгрупа $S$ є (абсолютно) $H$-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп тоді і тільки тоді, коли для кожного кардиналу $\lambda \geq 2$ довільне її топологічне $\lambda$-розширення Брандта в класі топологічних інверсних напівгруп є (абсолютно) $H$-замкненою напівгрупою.

9. Для довільного нескінченного кардинала $\lambda$ побудовано напівгрупові топології на $\lambda$-розширеннях Брандта топологічних напівгруп, що зберігають (абсолютну) $H$-замкненість.

10. Наведено приклад не $H$-замкненої топологічної напівгрупи $S$ такої, що для довільного кардинала $\lambda \geq 2$ існує абсолютно $H$-замкнене топологічне $\lambda$-розширення Брандта напівгрупи $S$.

11. Побудовано приклад зліченної абсолютно $H$-замкненої $0$-вимірної метризовної інверсної топологічної напівгрупи $S$ з абсолютно $H$-замкненим ідеалом $I$ такої, що фактор-напівгрупа Ріса $S/I$ не є топологічною напівгрупою.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ


1. *Гутік О. В., Павлик К. П.* $H$-замкнені топологічні напівгрупи та $\lambda$-розширення Брандта// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. **44**, № 3. – С. 20-28.
2. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* Absolutely $H$-closed topological Brandt $\lambda$-extensions of topological inverse semigroups// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. **61**. – С. 98-105.
3. *Павлик К. П.* Абсолютно $H$-замкнені топологічні напівгрупи та $\lambda$-розширення Брандта// Прикладні проблеми мех. і мат.: Наук. збірник. – Львів, 2004. – Випуск **2**. – С. 61-68.
4. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* On topological semigroups of matrix units// Semigroup Forum. – 2005. – Vol. **71**. – P. 389-400.
5. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* On Brandt $\lambda^0$-extensions of semigroups with zero// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. **49**, № 3. – С. 26-40.
6. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* On topological semigroups of matrix units// Праці третьої міжнар. алгебр. конф. в Україні. – Суми, 2001. – С. 42-45.
7. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* $H$-closed topological semigroups and topological Brandt $\lambda$-extensions// Міжнародна алгебраїчна конференція, Ужгород, 27-29 серпня 2001 р. – Ужгород, 2001. – С. 13.
8. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* On $H$-closed topological semigroups and Brandt $\lambda$-extensions// International Mathematical Conference honouring D. A. Grave's 100th year since the beginning of his work at Kyiv University. – Kyiv, June 17-22, 2002. – Kyiv, 2002. – P. 29-30.
9. *Pavlyk K. P.* Absolutely $H$-closed topological semigroups and Brandt $\lambda$-extensions// II-а літня школа з алгебри і топології, Львів–Долина, 2–14 липня 2004. – Programs of Invited Lectures and Abstracts of Research Reports, Львів–Долина, 2–14 липня 2004. – P. 28-30.
10. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* On compact semitopological semigroups of matrix units// Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім. академіка Я. С. Підстригача, Львів, 24-27 травня 2005 р. – Тези доповідей, Львів, 2005. – С. 247-248.
11. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.*, On absolutely $H$-closed topological semigroups and Brandt $\lambda^0$-extensions// $5th$ International Algebraic Conference in Ukraine, Odessa, July 20-27, 2005. – Abstracts, July 20-27, 2005, Odessa. - P. 83-84.
12. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* Pseudo-compact semitopological semigroups of matrix units// Third Summer School in Algebra, Analysis and Topology, Lviv-Kozyova, August 9–20, 2005. – Invited Lectures and Abstracts of Research Reports, Lviv-Kozyova, August 9–20, 2005. – P. 137-139.
13. *Gutik O. V., Pavlyk K. P.* On Brandt $\lambda^0$-extensions of topological semigroup with zero// IV-th Summer School "Algebra, Topology, Functional and Stochastic Analysis", Lviv-Kozyova, July 17–29, 2006. – Invited Lectures and Abstracts of Research Reports, Lviv-Kozyova, July 17–29, 2006. – P. 105-107.

## АНОТАЦІЯ

**Павлик К. П. Топологічні напівгрупи матричних одиниць і $\lambda$–розширення Брандта топологічних напівгруп.** – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2007.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню властивостей нескінченних топологічних напівгруп матричних одиниць та топологічних $\lambda$-розширень Брандта топологічних напівгруп. Описано усі псевдо-компактні топології $\tau$ на нескінченній напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$ такі, що $(B_\lambda, \tau)$ є напівтопологічною напівгрупою. Доведено, що на нескінченній напівгрупі матричних одиниць $B_\lambda$ не існує напівгрупової топології $\tau$, такої що $(B_\lambda, \tau)$ занурюється у компактну топологічну напівгрупу. Доведено, що нескінченна напівгрупа матричних одиниць є алгебраїчно $h$-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп. Побудовано напівгрупові абсолютно $H$-замкнені мінімальні та мінімальні інверсні гаусдорфові топології на нескінченній напівгрупі матричних одиниць. Описано структуру компактних $0$-простих топологічних інверсних напівгруп. Описано компактифікації Бора нескінченної напівгрупи матричних одиниць та топологічних $\lambda$-розширень Брандта топологічних напівгруп для нескінченного кардинала $\lambda$. Доведено, що топологічна інверсна напівгрупа $S$ є (абсолютно) $H$-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп тоді і тільки тоді, коли для кожного кардинала $\lambda \geq 2$ довільне її топологічне $\lambda$-розширення Брандта є (абсолютно) $H$-замкненою напівгрупою в класі топологічних інверсних напівгруп. Для довільного нескінченного кардинала $\lambda$ побудовано напівгрупові топології на $\lambda$-розширеннях Брандта топологічних напівгруп, що зберігають $H$-замкненість та абсолютну $H$-замкненість. Побудовано приклад зліченної абсолютно $H$-замкненої $0$-вимірної метризовної інверсної топологічної напівгрупи $S$ з абсолютно $H$-замкненим ідеалом $I$ такої, що фактор-напівгрупа Ріса $S/I$ не є топологічною напівгрупою.

**Ключові слова**: топологічна (напівтопологічна) напівгрупа, напівгрупа матричних одиниць, мінімальна напівгрупова топологія, топологічне $\lambda$–розширення Брандта, $H$-замкнена напівгрупа, абсолютно $H$-замкнена напівгрупа.

## АННОТАЦИЯ

**Павлык Е. Ф. Топологические полугруппы матричных единиц и $\lambda$–расширения Брандта топологических полугрупп.** – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Львовский национальный университет имени Ивана Франко, Львов, 2007.

Диссертационная работа посвящена изучению свойств бесконечных топологических полугрупп матричных единиц и топологических $\lambda$-расширений Брандта топологических полугрупп. Получено описание всех псевдо-компактных топологий $\tau$ на бесконечной полугруппе матричных единиц $B_\lambda$ такое, что $(B_\lambda,\tau)$ есть полутопологической полугруппой. Доказано, что на бесконечной полугруппе матричных единиц $B_\lambda$ не существует полугрупповой топологии $\tau$, такой, что $(B_\lambda,\tau)$ погружается в компактную топологическую полугруппу. Доказано, что бесконечная полугруппа матричных единиц алгебраически $h$-замкнутая в классе топологических инверсных полугрупп. Построены полугрупповые абсолютно $H$-замкнутые минимальные и минимальные инверсные гаусдорфовые топологии на бесконечной полугруппе матричных единиц. Получены описание строения компактных $0$-простых топологических инверсных полугрупп и описание компактификаций Бора бесконечной полугруппы матричных единиц и топологических $\lambda$-расширений Брандта топологических полугрупп для бесконечного кардинала $\lambda$. Доказано, что топологическая инверсная полугруппа $S$ (абсолютно) $H$-замкнутая в классе топологических инверсных полугрупп тогда и только тогда, когда для каждого кардинала $\lambda \geq 2$ ее произвольное топологическое $\lambda$-расширение Брандта является (абсолютно) $H$-замкнутой полугруппой в классе топологических инверсных полугрупп. Для произвольного бесконечного кардинала $\lambda$ построены полугрупповые топологии на $\lambda$-расширениях Брандта топологических полугрупп, которые сохраняют $H$-замкнутость и абсолютную $H$-замкнутость. Построен пример счетной абсолютно $H$-замкнутой $0$-измеримой метризовної инверсной топологической полугруппы $S$ с абсолютно $H$-замкнутым идеалом $I$ такой, что фактор-полугруппа Риса $S/I$ не является топологической полугруппой.

**Ключевые слова**: топологическая (полутопологическая) полугруппа, полугруппа матричных единиц, минимальная полугрупповая топология, топологическое $\lambda$–расширения Брандта, $H$-замкнутая полугруппа, абсолютно $H$-замкнутая полугруппа.

## ABSTRACT

**Pavlyk K. F. Topological semigroups of matrix units and Brandt $\lambda$–extensions of topological semigroups.** – Manuscript.

Thesis of dissertation for obtaining the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Ivan Franko Lviv National University, Lviv, 2007.

The thesis is devoted to the investigation of properties of an infinite topological semigroup of matrix units and of the topological Brandt $\lambda$-extensions of topological semigroups.

The thesis consists of introduction, three chapters and conclusive remarks. In the first chapter we introduce the bibliography and provide a brief history of the investigations. Also the main problems to be solved in the dissertation are formulated. In the first section of the first chapter generally-known useful results from the algebraic semigroup theory, general topology and the theory of topological semigroup are stated. The following chapters consist of the results obtained by the author.

The second chapter is devoted to study of the topological properties of the infinite semigroup of matrix units $B_\lambda$. The compact, countably compact and pseudo-compact

topologies $\tau$ on the infinite semigroup of matrix units $B_\lambda$ such that $(B_\lambda,\tau)$ is a semitopological semigroup are described.

The topological embeddings of the infinite semigroup of matrix units into compact topological semigroups are considered in the 2nd section of chapter II. It is proved that on the infinite semigroup of matrix units there exists no semigroup topology $\tau$ such that $(B_\lambda,\tau)$ embeds into a compact topological semigroup. Moreover, any continuous homomorphism from the infinite topological semigroup of matrix units into a compact topological semigroup is annihilating.

The semigroup topologizations of the infinite semigroup of matrix units are investigated in the 3rd section of chapter II. It is proved that the infinite semigroup of matrix units is algebraically $h$-closed in the class of topological inverse semigroups. An example of an infinite semigroup of matrix units which is not $H$-closed in the class of locally compact topological semigroup is constructed. Some absolutely $H$-closed minimal and minimal inverse semigroup topologies on the infinite semigroup of matrix units are described.

In the third chapter, the preservation of the $H$-closedness and the absolute $H$-closedness by the topological Brandt $\lambda$-extensions of topological semigroups are investigated. The main result of this chapter is: any topological inverse semigroup $S$ is (absolutely) $H$-closed in the class of topological inverse semigroups if and only if for every cardinal $\lambda \geq 2$ arbitrary topological Brandt $\lambda$-extension of the semigroup $S$ is (absolutely) $H$-closed semigroup in the class of topological inverse semigroups. For every infinite cardinal $\lambda$, semigroup topologies on Brandt $\lambda$-extensions which preserve $H$-closedness and an absolute $H$-closedness are constructed. An example of a non $H$-closed topological inverse semigroup $S$ in the class of topological inverse semigroups such that for any cardinal $\lambda \geq 2$ there exists an absolute $H$-closed topological Brandt $\lambda$–extension of the semigroup $S$ in the class of topological semigroups is constructed.

As a consequence of the obtained results, the structure of compact $0$-simple topological inverse semigroups is described. The Bohr compactification of the infinite semigroup of matrix units and of the topological Brandt $\lambda$–extensions of topological semigroups for the infinite cardinal $\lambda$ are described.

Using the construction of topological Brandt $\lambda$-extensions of topological semigroups, an example of the countable absolutely $H$-closed $0$-dimensional metrizable inverse topological semigroup $S$ with an absolutely $H$-closed ideal $I$ such that the Rees quotient-semigroup $S/I$ is not a topological semigroup is constructed.

**Key words**: topological (semitopological) semigroup, semigroup of matrix units, minimal semigroup topology, the topological Brandt $\lambda$–extension, $H$-closed semigroup, absolutely $H$-closed semigroup.