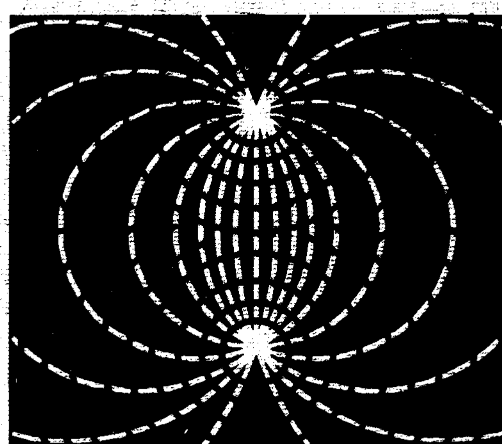
ISSN 0130–9420

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я.С.ПІДСТРИГАЧА

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА ФІЗИКО-МЕХАНІЧНІ ПОЛЯ

43, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ ПОЛЯ



2000

MATHEMATICAL METHODS AND PHYSICOMECHANICAL FIELDS

УДК 512.546

О. В. Гутік, Є. Г. Зеленюк

НЕВЛАСНІ ГОМОМОРФІЗМИ НАПІВГРУП УЛЬТРАФІЛЬТРІВ

Нехай $\mathcal{T}$ – звичайна топологія прямої суми на зліченній булевій групі $\mathbb{B} = \oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(2)$, $\mathcal{T}^*$ – її напівгрупа ультрафільтрів. Автоморфізм на $\mathcal{T}^*$ називається власним, якщо він індукується деяким гомоморфізмом f' на $(\mathbb{B}, \mathcal{T})$, який задовольняє таку умову: для кожного $x \in \mathbb{B}$ знайдеться окіл одиниці V_x такий, що $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для будь-якого $y \in V_x$. Побудовано невласний топологічний автоморфізм на $\mathcal{T}^*$.

Нехай G – група, βG – Стоун-Чехівська компактифікація G як дискретного простору. Елементами βG є всі можливі ультрафільтри на G, а базу топології утворюють підмножини вигляду $\overline{A} = \{p \in \beta G : A \in p\}$, де $A \subseteq G$. Підмножина головних ультрафільтрів ототожнюється з G, $G^* = \beta G \setminus G$. Операція множення на G природно продовжується до операції множення на βG з неперервними лівими зсувами на елементи з G та неперервними правими зсувами вже на будь-які елементи з βG. Для довільних ультрафільтрів p, $q \in \beta G$ базу ультрафільтра $p \cdot q$ утворюють підмножини вигляду $\bigcup \{a \cdot B_a : a \in A\}$, де $A \in p$, $B_a \in q$. Продовжена операція залишається асоціативною, таким чином перетворюючи βG у компактну правотопологічну напівгрупу. *Правотопологічність* означає неперервність правих зсувів. Про цю напівгрупу див. книгу [4].

Нехай τ – довільна недискретна лівоінваріантна топологія на G. *Лівоінваріантність* означає неперервність лівих зсувів. Усі топології вважаються T_1-топологіями. У напівгрупі G^* топології τ відповідає замкнена піднапівгрупа τ^* усіх неголовних ультрафільтрів на G, що збігаються в τ до одиниці. Вона називається *напівгрупою ультрафільтрів лівотопологічної групи* (G, τ) або *лівоінваріантної топології* τ [3]. Напівгрупа τ^* визначається і не обов'язково всією лівотопологічною групою (G, τ), а й довільним околом її одиниці. Відкритий окіл одиниці лівотопологічної групи називається *локальною лівотопологічною групою* [1].

У вивченні напівгруп ультрафільтрів важливу роль відіграють топологічні ізоморфізми та автоморфізми. Топологічний ізоморфізм напівгруп ультрафільтрів лівотопологічних груп (G_1, τ_1), (G_2, τ_2) отримується за допомогою топологічного ізоморфізму їх відкритих околів одиниці X, Y як локальних лівотопологічних груп. Топологічним ізоморфізмом локальних лівотопологічних груп X, Y називається відображення $f : X \to Y$ таке, що

а) f – гомеоморфізм, $f(e_x) = e_y$;

б) для кожного $x \in X$ існує окіл одиниці V_x такий, що
$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для довільного $z \in V_x$.

Якщо $f : X \to Y$ – топологічний ізоморфізм локальних лівотопологічних груп X, Y, $\overline{f} : \mathrm{cl}_{\beta G_1} X \to \mathrm{cl}_{\beta G_2} Y$ – Стоун-Чехівське продовження f і $f^* = \overline{f}|_{\tau_1^*}$, то $f^* : \tau_1^* \to \tau_2^*$ – топологічний ізоморфізм напівгруп ультрафільтрів τ_1^*, τ_2^* [1, 2]. Такі топологічні ізоморфізми напівгруп ультрафільтрів на-

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2000. – 43, № 1. – С. 19-22.

зиваються *власними*. Кожна злічена недискретна регулярна локальна лівотопологічна група зі зліченною базою околів одиниці топологічно ізоморфна $(\mathbb{B}, \mathcal{T})$, де $\mathcal{T}$ – звичайна топологія прямої суми на зліченній булевій групі $\mathbb{B} = \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(2)$ [1]. Таким чином, напівгрупа ультрафільтрів довільної зліченної недискретної регулярної лівотопологічної групи зі зліченною базою околів одиниці власно ізоморфна $\mathcal{T}^*$. Постає питання: *чи кожен топологічний автоморфізм на $\mathcal{T}^*$ є власним?*

Теорема 1. *На $\mathcal{T}^*$ існують невласні топологічні автоморфізми.*

Доведення. Нехай $G = \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(m)$, $m \geq 3$, τ – звичайна топологія прямої суми на G. Достатньо побудувати невласний топологічний автоморфізм на $\mathcal{T}^*$.

Для кожного $i \in \mathbb{Z}(m)$ через i^+ позначимо елемент, у який переходить i під дією підстановки на $\mathbb{Z}(m)$, визначеної циклом $(1, 2, \dots, m-1)$. Виберемо в $\mathbb{N}$ нескінченну сім'ю нескінченних підмножин $\{A\} \cup \{B_a \mid a \in A\}$. Нехай x – довільний ненульовий елемент G, $n_1 < \dots < n_k$ – номери його ненульових координат $x(n_1), \dots, x(n_k)$, $l(x) = n_1$, $r(x) = n_k$. Означимо елемент $y = f(x)$ так. Ненульові координати y ті ж, що й x,

$$y(n_1) = x(n_1)^+,$$

$$y(n_{i+1}) = \begin{cases} x(n_{i+1}), & \text{якщо} \quad n_i \in A, \quad n_{i+1} \in B_{n_i}, \\ x(n_{i+1})^+ & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Означимо також $f(0) = 0$.

Очевидно, f – гомеоморфізм на (G, τ) і, оскільки $f(0) = 0$, то $\pi = \overline{f}|_{\mathcal{T}^*}$ – гомеоморфізм на $\mathcal{T}^*$.

Гомеоморфізм y не є топологічним автоморфізмом на локальній лівотопологічній групі (G, τ), а також на довільному її відкритому околі одиниці. Справді, нехай x_n – елемент G з єдиною ненульовою n-ою координатою. Тоді, якщо $A \ni n < m \in B_n$, то $f(x_n + x_m) \neq f(x_n) + f(x_m)$.

Переконаємося, що π – топологічний автоморфізм на $\mathcal{T}^*$. Нехай $p, q \in \mathcal{T}^*$. Розглянемо два випадки.

Випадок 1: $Q = \{y \in G \mid l(y) \in B_a\} \in q$ для деякого $a \in A$.

Виберемо множину P в p таку, що $r(x) \neq a$ для кожного $x \in P$. Нехай x – довільний ненульовий елемент з P, $n = r(x)$. Виберемо множину Q_x в q таку, що $Q_x \subseteq Q$ і $n < l(y)$ для кожного $y \in Q_x$. Тоді $f(x+y) = f(x) + f(y)$, а, отже, $\pi(p+q) = \pi(p) + \pi(q)$.

Випадок 2: $\{y \in G \mid l(y) \in B_a\} \notin q$ для кожного $a \in A$.

Нехай x – довільний ненульовий елемент із G, $n = r(x)$. Якщо $n \in A$, то виберемо множину Q_x в q таку, що $n < l(y) \notin B_n$ для кожного $y \in Q_x$. Якщо ж $n \notin A$, то $Q_x \in q$ виберемо лише з умови $n < l(y)$ для кожного $y \in Q_x$. Тоді $f(x+y) = f(x) + f(y)$ а, отже, $\pi(p+q) = \pi(p) + \pi(q)$.

Доведення того, що π – невласний топологічний автоморфізм на $\mathcal{T}^*$ випливає з наступної леми, фактично доведеної в [5]. $\Diamond$

Лема. *Нехай φ – фільтр на G зі зліченною базою такою, що $\overline{\varphi} = \bigcap\{\overline{U} \mid U \in \varphi\} \subseteq G^*$. Якщо два відображення з βG у компактний гаусдорфовий F-простір співпадають на $\overline{\varphi}$, то вони співпадають і на деякому $U \in \varphi$.* ◊

Зауваження. Відносно побудованого в теоремі 1 відображення f орбіта кожного ненульового елемента з G є $(m-1)$-елементною. З цього випливає, що й відносно відображення π орбіта кожного елемента з τ^* є $(m-1)$-елементною.

Окрім топологічних автоморфізмів, важливу роль відіграють також неперервні гомоморфізми напівгруп ультрафільтрів на скінченні напівгрупи. Неперервний гомоморфізм напівгрупи ультрафільтрів лівотопологічної групи (G, τ) на скінченну напівгрупу S отримується за допомогою гомоморфізму на S відкритого околу X одиниці (G, τ) як локальної лівотопологічної групи. *Гомоморфізмом локальної лівотопологічної групи X на скінченну напівгрупу S* називається відображення $f : X \to S$ таке, що

а) $f(U \setminus \{e\}) = S$ для кожного околу одиниці U;

б) для кожного неодиничного $x \in X$ існує окіл одиниці V_x такий, що $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для довільного неодиничного $z \in V_x$.

Якщо $f : X \to S$ – гомоморфізм локальної лівотопологічної групи X на скінченну напівгрупу S, $\overline{f} : \mathrm{cl}_{\beta G} X \to S$ – Стоун-Чехівське продовження f і $f^* = \overline{f}|_{\tau^*}$, то $f^* : \tau^* \to S$ – неперервний гомоморфізм напівгрупи ультрафільтрів τ^* на S. Такі неперервні гомоморфізми називаються *власними*.

Теорема 2. *Для довільної скінченної неодноелементної напівгрупи S існує невласний неперервний гомоморфізм $\mathcal{T}^*$ на S.*

Доведення. Нехай x_n – елемент з $\mathbb{B} = \otimes_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(2)$ з єдиною ненульовою n-ю координатою. Виберемо нескінченне розбиття множини $\mathbb{N}$ на нескінченні підмножини $\{A\} \cup \{B_\alpha \mid \alpha \in A\} \cup \{C_s \mid s \in S\}$ і виберемо в S елементи u, v такі, що $u \cdot u \neq v$. Означимо

$$f(x_n) = \begin{cases} s, & \text{якщо} \quad n \in C_s, \\ u, & \text{якщо} \quad n \notin \bigcup\{C_s \mid s \in S\}, \end{cases}$$

$$f(x_n + x_m) = v, \qquad \text{якщо} \quad n \in A,\ m \in B_n,\ n < m.$$

Розглянемо в $\mathbb{B}$ довільний ненульовий елемент $x = x_{n_1} + \ldots + x_{n_k}$, $n_1 < \ldots < n_k$. Якщо $n_1 \in A$ і $n_{i+1} \in B_{n_1}$, то $x_{n_1} + x_{n_{i+1}}$ виділимо дужками. Таким чином, елемент x однозначно записується у вигляді $x = y_1 + \ldots + y_t$, де кожен y_i є або елементом вигляду x_n, $n \notin A$, або ж елементом вигляду $x_n + x_m$, $n \in A$, $n < m \in B_n$. Означимо $f(x) = f(y_1) \ldots f(y_t)$.

Оскільки $f(x_n + x_m) = v \neq u \cdot u = f(x_n) \cdot f(x_m)$, якщо $A \ni n < m \in B_n$, то f не є гомоморфізмом. Доведемо, що $\pi = \overline{f}|_{\mathcal{T}^*}$ – гомоморфізм. Нехай p, $q \in \mathcal{T}^*$. Розглянемо два випадки.

Випадок 1: $Q = \{y \in \mathbb{B} \mid l(y) \in B_a\} \in q$ для деякого $a \in A$.

Виберемо множину P в p таку, що $r(x) \neq a$ для кожного $x \in P$. Нехай x – довільний ненульовий елемент з P, $n = r(x)$. Виберемо множину Q_x в q таку, що $Q_x \subseteq Q$ і $n < l(y)$ для кожного $y \in Q_x$. Тоді $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, а, отже, $\pi(p + q) = \pi(p) \cdot \pi(q)$.

Випадок 2: $\{y \in \mathbb{B} \mid l(y) \in B_a\} \notin q$ для кожного $a \in A$.

Нехай x – довільний ненульовий елемент з $\mathbb{B}$, $n = r(x)$. Якщо $n \in A$, то виберемо множину Q_x в q таку, що $n < l(y) \notin B_n$ для кожного $y \in Q_x$. Якщо ж $n \notin A$, то $Q_x \in q$ виберемо лише з умови $n < l(y)$. Тоді $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ і, отже, $\pi(p + q) = \pi(p) \cdot \pi(q)$.

Як і в теоремі 1, доведення того, що π – невласний неперервний гомоморфізм $\mathcal{T}^*$ на S, випливає з леми. ◊

Питання. Чи існує топологічний автоморфізм на $\mathcal{T}^*$, який не індукується біекцією на $\mathbb{B}$?

1. *Зеленюк Е. Г.* Конечные группы в βN тривиальны. – Киев, 1996. – 12 с. – (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики; 96.3).
2. *Зеленюк Е. Г.* О топологических группах с конечными полугруппами ультрафильтров // Мат. студії. – 1997. – Вип. 7, № 2. – С. 139–144.
3. *Протасов И. В.* Ультрафильтры и топологии на группах // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 5. – С. 163–186.
4. *Hindman N., Strauss D.* Algebra in Stone-Čech compactification – theory and applications. – Berlin: De Gruyter, 1998. – 485 p.
5. *Protasov I., Pym J., Strauss D.* A lemma on extending functions into F-spaces and homomorphisms between Stone-Čech remainders // Manuscript.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ГОМОМОРФИЗМЫ ПОЛУГРУПП УЛЬТРАФИЛЬТРОВ

Пусть $\mathcal{T}$ – обычная топология прямой суммы на счетной буллевой группе $\mathbb{B} = \oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(2)$, $\mathcal{T}^*$ – ее полугруппа ультрафильтров. Автоморфизм на $\mathcal{T}^*$ называется собственным, если он индуцируется некоторым гомоморфизмом f' на $(\mathbb{B}, \mathcal{T})$, который удовлетворяет следующему условию: для каждого $x \in \mathbb{B}$ существует окрестность единицы V_x такая, что $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ для произвольного $y \in V_x$. Построен несобственный топологический автоморфизм на $\mathcal{T}^*$.

NONPROPER HOMOMORPHISMS OF SEMIGROUPS OF ULTRAFILTERS

Let $\mathcal{T}$ be is usual summ direct topology on the countable Boolean group $\mathbb{B} = \oplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}(2)$, $\mathcal{T}^*$ is its semigroup of ultrafilters. An automorphism on $\mathcal{T}^*$ is called proper if it is induced by some homeomorphism f' on $(\mathbb{B}, \mathcal{T})$, which satisfies the next condition: for any $x \in \mathbb{B}$ there exists a neighbourhood of identity V_x such that $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ for all $y \in V_x$. A nonproper topological automorphism on $\mathcal{T}^*$ is constructed.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.03.99