Математичні студії
випуск 6

УДК 512.536.72

О СТРУКТУРЕ СВЯЗКИ КОМПАКТНОЙ ИНВЕРСНОЙ ПОЛУГРУППЫ С ОТКРЫТЫМИ СДВИГАМИ

О.В. Гутик

O. Gutik, *On structure of the band of a compact inverse semigroup with open translations* // Matematychni Studii, **6** (1996) P.33–38.

The band of a compact inverse semigroup with open translations is a countable Lawson semilattice. A base of its topology is defined by the subsemigroup of isolated points. A first countable inverse semigroup with open translations is metrizable.

Инверсную полугруппу S, наделенную топологией, будем называть *топологической инверсной полугруппой*, если умножение и инверсия непрерывны относительно этой топологии.

Элемент e полугруппы S называется *идемпотентом*, если $ee = e$. Подполугруппа идемпотентов (связка) инверсной полугруппы S обозначается через E. На E определен естественный частичный порядок: $x \leq y$, если $xy = yx = x$. В инверсной полугруппе S элемент инверсный к x обозначается через x^{-1}.

Далее S – инверсная полугруппа.

Определение 1. Пусть S – топологическая полугруппа. Если для произвольного $a \in S$ отображение $r_a : S \to S$ ($l_a : S \to S$), определенное формулой $r_a(x) = ax$ ($l_a(x) = xa$) открыто, то S называется топологической полугруппой с открытыми правыми (левыми) сдвигами. Полугруппа с открытыми правыми и с открытыми левыми сдвигами называется полугруппой с открытыми сдвигами.

Цель настоящей статьи – исследовать структуру подполугруппы идемпотентов компактной топологической инверсной полугруппы с открытыми правыми (левыми) сдвигами. Оказывается, что связка компактной инверсной полугруппы с правыми (левыми) открытыми сдвигами – счетная полурешетка Лоусона с конечным числом максимальниых идемпотентов. При этом база топологии на связке определяется подполугруппой изолированных точек. Доказано, что компактная инверсная полугруппа с открытыми правыми (левыми) сдвигами и с первой аксиомой счетности метризуема.

Терминология, основные определения и обозначения заимствованы из [1] и [2]. Кардиналы отождествляются с начальными ординалами и обозначаются буквами α, β, $\mathfrak{m}$, τ, ω; через $\chi(X)$ обозначается характер топологического пространства X.

Далее E – компактная коммутативная связка с открытыми сдвигами.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 20M18, 22A15.

Введем следующие обозначения: для произвольного $e \in E$ положим

$$L(e) = \{f \in E | ef = f\}, \quad M(e) = \{f \in E | ef = e\}.$$

Очевидно, что $L(e) = eE$ и $L(e)$ – открыто-замкнутое подмножество в E для произвольного $e \in E$. Заметим также, что если e – изолированная точка в E, то открыто-замкнуто в E также множество $M(e)$, как полный прообраз точки e при непрерывном отображении $\varphi_e : E \to eE$, определенном формулой $\varphi_e(x) = ex$.

Лемма 1. *Подпространство E нульмерно.*

Доказательство. Пусть $e \in E$ и $U(e)$ – произвольная окрестность e в E. Множество $U_e = U(e) \cap L(e)$ открыто в E и содержит идемпотент e. Множество $eE \backslash U_e$ – компакт и, следовательно, из его открытого покрытия $\gamma = \{L(f) | f \in eE \backslash U_e\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\gamma_n = \{L(f_1), \dots, L(f_n)\}$. Так как множество вида $L(f_i)$ – открыто-замкнуто в E для произвольного $f_i \in E$, то множество $V_e = L(e) \backslash \cup_{i=1}^{n} L(f_i)$ – открыто-замкнуто, содержит идемпотент e и лежит в $U(e)$. Таким образом в E существует база из открыто-замкнутых подмножеств.

Следствие 1. *Компактная коммутативная связка с открытыми сдвигами – полурешетка Лоусона.*

Доказательство даного предложения непосредственно следует из леммы 1 и Теоремы II.1.5 [3].

Через $\mathcal{M}axE$ обозначим множество максимальных идемпотентов связки E.

Известно следующее

Предложение 1. *В компактной инверсной полугруппе идемпотентов E для произвольного идемпотента e существует максимальный идемпотент f такой, что $e \leq f$.*

Лемма 2. *Подмножество максимальных идемпотентов компактной коммутативной связки с открытыми сдвигами конечно.*

Доказательство. Рассмотрим открытое покрытие $\gamma = \{L(e) | e \in \mathcal{M}axE\}$ компакта E. Если $e, f \in \mathcal{M}axE$ и $e \neq f$, то $e \notin L(f)$ и $f \notin L(e)$. Так как из γ можно выбрать конечное подпокрытие E, то множество $\mathcal{M}axE$ – конечно.

Напомним, что топологическое пространство называется *разреженным,* если оно не содержит непустого плотного в себе подмножества.

Лемма 3. *Подпространство E разреженно.*

Доказательство. Очевидно, что достаточно показать, что произвольное непустое замкнутое подмножество в E содержит изолированную в себе точку.

Пусть F – произвольное непустое замкнутое подмножество в E и $a \in F$. Положим $A_1 = L(a) \cap F$. Если множество A_1 одноточечно, то $\{a\} = L(a) \cap F$. Если же $|A_1| \geq 2$, то выберем произвольную точку $a_1 \in A_1 \backslash \{a\}$. Далее по трансфинитной индукции для произвольного ординала $\alpha < \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m} = |(L(a) \cap F) \backslash \{a\}|$, построим семейство подмножеств $\{A_\alpha\}$ и семейство точек $\{a_\alpha\}$ следующим образом:

а) если α – непредельный ординал, то $A_\alpha = L(a_{\alpha-1}) \cap F$, и a_α – произвольная точка из множества $A_\alpha \backslash \{a_{\alpha-1}\}$;

б) если α – предельный ординал, то $A_\alpha = \cap \{L(a_\beta) | \beta < \alpha\} \cap F$ и a_α – произвольная точка из A_α.

При этом, если для некоторого ординала α множество A_α одноточечно, то $\{x\} = A_\alpha$ – изолированная точка в F, так как $\{x\} = L(x) \cap F$. В противном случае, так как $\{A_\alpha\}$ – семейство вложенных компактных подмножеств компакта F, то $\cap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$. Пусть $A = \cap_\alpha A_\alpha$. По определению множество A состоит только из попарно несравнимых идемпотентов или из одной точки. В любом случае, если $x \in A$, то $\{x\} = L(x) \cap F$, т.е. x – изолированная точка в F.

Определение 2 [5]. Элемент $s \in E$ называется точкой локального минимума, если существует открытая окрестность $U(s)$ такая, что $L(s) \cap U(s) \subseteq M(s)$.

Подмножество всех локальных минимумов E обозначим через $K(E)$. Связка E – полугруппа с открытыми сдвигами, следовательно, произвольная точка из $K(E)$ изолирована в E, и $K(E)$ – подполугруппа в E. Заметим, что $K(E)$ – множество изолированных точек в E и $K(E)$ плотно в E ([3], теорема II.1.12).

Непосредственно из определения 2 следует:

Предложение 2. *Для произвольного $x \in K(E)$ множество $L(x)$ конечно.*

Предложение 3. *Пусть E – бесконечно. Если для $x \in K(E)\backslash\{0\}$ существует несравнимый с x идемпотент, то и существует $y \in K(E)$ несравнимый с x.*

Доказательство. Пусть $x \in K(E)\backslash\{0\}$ и x удовлетворяет условию предложения 3. Выберем $t \in L(x)\backslash\{x\}$ такое, что существует $l \in E$, $t < l$ и l несравнимо с x. Множество $M(t)\backslash(L(x) \cup M(x))$ открыто в E, следовательно существует $y \in K(E) \cap (M(t)\backslash(L(x) \cup M(x)))$, так как $K(E)$ плотно в E. Очевидно, что y – изолированная точка в E и x, y – несравнимые идемпотенты.

Предложение 4. *Пусть E – бесконечно. Для произвольного $x \in K(E)\backslash\mathcal{M}axE$ множество $K(E) \cap (M(x)\backslash\{x\})$ непусто.*

Доказательство. Так как x – изолированная точка в E, то $M(x)$ и $M(x)\backslash\{x\}$ – открытые подмножества в E. Подмножество $K(E)$ плотно в E, следовательно, существует точка $y \in K(E)$ такая, что $y \in M(x)\backslash\{x\}$.

Лемма 4. *Произвольное подмножество попарно несравнимых идемпотентов в $K(E)$ конечно.*

Доказательство. Пусть $Y \subset K(E)$ и все идемпотенты в Y попарно несравнимы. Рассмотрим семейство $\gamma = \{M(x) | x \in Y\}$ открытых подмножеств в E.

Пусть $G = \cup_{x\in Y} M(x)$. Очевидно, что для любого $y \in E\backslash G$ $L(y) \subset E\backslash G$, следовательно, $E\backslash G$ – открыто в E. Рассмотрим открытое покрытие $\gamma^* = \gamma \cup \{E\backslash G\}$ множества E. Заметим, что каждую точку $x \in Y$ содержит только элемент $M(x)$ покрытия γ^*. Связка E – компакт, следовательно, существует конечное подпокрытие в γ^* множества E. Таким образом Y конечно.

Теорема 1. *Если E – компактная коммутативная связка с открытыми сдвигами, то $K(E)$ – счетно.*

Доказательство. Предположим противное. Из леммы 4 и предложения 2 следует, что существует $x_1 \in K(E)$ такое, что $|M(x_1) \cap K(E)| > \omega$.

Из предложения 4 следует существование $x_2 \in M(x_1) \cap K(E)$, причем $x_2 > x_1$ и выполняются условия:

a) $|L(x_2) \cap K(E)| < \omega$;

б) $|(E\backslash(L(x_2)\cup M(x_2)))\cap K(E)|<\omega$.

Аналогичными рассуждениями, индукцией по $n\in\mathbb{N}$ мы можем построить счетную цепь: $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots<\ldots$. Причем для элементов x_i, $i\in\mathbb{N}$, даной цепи выполняются условия:

1) $K(E)\cap M(x_1)\supset K(E)\cap M(x_2)\supset\cdots\supset K(E)\cap M(x_n)\supset\ldots$.

2) для произвольного $i\in\mathbb{N}$

а) $|L(x_i)\cap K(E)|<\omega$;

б) $|(E\backslash(L(x_i)\cup M(x_i)))\cap K(E)|<\omega$;

в) $|M(x_i)\cap K(E)|>\omega$.

Возможны два случая:

1) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(K(E)\cap M(x_i))=\varnothing$;

2) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(K(E)\cap M(x_i))\neq\varnothing$.

В первом случае

$$K(E)=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(K(E)\cap(L(x_i)\cup NO(x_i))),$$

где $NO(x_i)$ – множество идемпотентов связки E несравнимых с x_i. Таким образом $|K(E)|\leq\omega$, что противоречит предположению.

Если выполняется условие 2), то существует $l\in K(E)$ такое, что

$$l\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(K(E)\cap M(x_i)),$$

причем $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots<\cdots<l$. Но это противоречит предложению 2.

Таким образом пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 2. *Связка E – топологическое пространство с первой аксиомой счетности.*

Доказательство. Покажем, что для произвольного $x\in E$ окрестности вида $U_e(x)=L(x)\cap M(e)$, где $e\in K(E)\cap L(x)$ определяют базу топологии в точке x.

Случай когда $x\in K(E)$ тривиален.

Если $x\in E\backslash K(E)$, то достаточно для произвольной окрестности $V(x)$ найти $e\in K(E)\cap L(x)$ такое, что $U_e(x)\subset V(x)$.

Зафиксируем произвольную окрестность $V(x)$. Подмножество $K(E)$ плотно в E, следовательно, существует $e_0\in K(E)\cap L(x)$ такое, что $e_0\in V(x)\cap L(x)\subset V(x)$. Если $U_{e_0}(x)\subset V(x)$, то доказательство закончено. В противном случае, имеем $U_{e_0}(x)\backslash V(x)\neq\varnothing$. Множество $B=U_{e_0}(x)\backslash V(x)$ – компактно, следовательно из его открытого покрытия $\gamma_B=\{L(x)|x\in B\}$ можно выбрать конечное подпокрытие

$$\gamma_B^*=\{L(x_i)|x_i\in B,i=1,\ldots,n\}.$$

Множество $L(x_1)\cup\cdots\cup L(x_n)$ замкнуто в E, и, таким образом, $U_{e_0}(x)\backslash(L(x_1)\cup\cdots\cup L(x_n))$ – открытое в E. Подпространство $K(E)$ плотно в E, следовательно существует $e\in K(E)$ такое, что $e\in U_{e_0}(x)\backslash(L(x_1)\cup\cdots\cup L(x_n))$ и при этом выполняется

$$U_e(x)\subset U_{e_0}(x)\backslash(L(x_1)\cup\cdots\cup L(x_n))\subset V(x)\backslash B\subset V(x).$$

По теореме 1 выполняется неравенство $|K(E)|\leq\omega$, следовательно, в каждой точке $x\in E\backslash K(E)$ существует счетная база. Теорема доказана.

Теорема 3. *Компактная коммутативная связка с открытыми сдвигами счетна.*

Доказательство. С леммы 3 следует, что E – разреженное пространство, следовательно $\chi(E) = |E|$ ([4], глава 1, теорема 25). Использовав теорему 2, имеем $|E| = \chi(E) \leq \omega$.

Предложение 5. *Подполугруппа идемпотентов E топологической инверсной полугруппы S с открытыми правыми (левыми) сдвигами – полугруппа с открытыми сдвигами.*

Доказательство. Отображения $\varphi : S \to E$ и $\psi : S \to E$ определим следующим образом: $\varphi(x) = xx^{-1}$ и $\psi(x) = x^{-1}x$.

Пусть U – произвольное открытое множество в E и $V = \varphi^{-1}(U) \cap \psi^{-1}(U)$.

Если S – топологическая инверсная полугруппа с открытыми правыми сдвигами, то нам достаточно доказать, что для произвольного идемпотента $e \in E$ выполняется равенство $eU = eV \cap E$. Так как $U \subseteq V$, то $eV \supseteq eU$ и $eU = eU \cap E \subseteq eV \cap E$. Если $p \in eV \cap E$, то $p = ex \in E$ для некоторого $x \in V$. Так как $xx^{-1} \in U$, то

$$p = pp^{-1} = ex(ex)^{-1} = exx^{-1}e = eexx^{-1} = exx^{-1} \in eU.$$

Если S – топологическая инверсная полугруппа с открытыми левыми сдвигами, то, аналогично как и в предыдущем случае, нам достаточно доказать, что для произвольного открытого множества U в E и для произвольного идемпотента $e \in E$ выполняется равенство $eU = Ve \cap E$, где $V = \varphi^{-1}(U) \cap \psi^{-1}(U)$. Так как $U \subseteq V$, то $Ve \supseteq Ue = eU$ и $eU = eU \cap E \subseteq Ve \cap E$. Если $q \in Ve \cap E$, то $q = ye \in E$ для некоторого $y \in V$. Так как $y^{-1}y \in U$, то

$$q = q^{-1}q = (ye)^{-1}ye = ey^{-1}ye = ey^{-1}ye = y^{-1}yee = y^{-1}ye \in Ue = eU.$$

Определение 3. Топологическая инверсная полугруппа S называется $(\omega+1)$-полугруппой, если подполугруппа идемпотентов полугруппы S топологически изоморфна полугруппе $\mathcal{J} = (\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, \max)$ с естественной топологией.

Определение 4. Топологическая инверсная полугруппа S называется n-полугруппой, если подполугруппа идемпотентов полугруппы S изоморфна конечной подполугруппе полугруппы $(\omega, \min)$.

Следствие 3. *Пусть S – компактная топологическая инверсная полугруппа с открытыми правыми (левыми) сдвигами. Если подполугруппа идемпотентов полугруппы S линейно упорядочена, то выполняется одно из условий:*
1) S – $(\omega+1)$-полугруппа;
2) S – n-полугруппа.

Доказательство. Если подполугруппа идемпотентов полугруппы S конечна, то, очевидно, что S – n-полугруппа.

Если подполугруппа идемпотентов E полугруппы S бесконечна, то для произвольного $e \in E \backslash \{1\}$ множество $M(e) \backslash \{e\} = E \backslash L(e)$ – открыто в E. Следовательно, $\{e\} = e(M(e) \backslash \{e\})$ и x – изолированная точка в E. Таким образом все точки $E \backslash \{1\}$ – изолированы и E – счетное, линейно-упорядоченное пространство. То очевидно, что E топологически изоморфно $\mathcal{J}$.

Следствие 4. *Пусть S – компактная топологическая клиффордова инверсная полугруппа с открытыми правыми (левыми) сдвигами. Если подполугруппа идемпотентов S дерево, то S – конечная топологическая сумма $(\omega+1)$- и n-полугрупп.*

Доказательство. Если E – подполугруппа идемпотентов S, то множество $\mathcal{M}axE$ – конечно (лемма 2). Пусть $\mathcal{M}axE=\{e_1,\dots,e_n\}$. Для произвольного $e_i\in\mathcal{M}axE$ $(i=1,\dots,n)$ множество $L(e_i)$ – линейно упорядоченная подполугруппа идемпотентов в E. Следовательно, для произвольных $e_i,e_j\in\mathcal{M}axE$ $(i,j=1,\dots,n,i\neq j)$ подпространство $L(e_i)\cap L(e_j)$ – конечное и дискретное в E (следствие 2). Пусть E^* – обьединение всевозможных пересечений вида $L(e_k)\cap L(e_l)$ $k,l=1,\dots,n$ и $k\neq l$. Тогда

$$E=\oplus_{i=1}^{n}(L(e_i)\backslash E^*)\oplus E^*.$$

Пусть S – хаусдорфова компактная топологическая инверсная полугруппа.

Введем следующие обозначения: для произвольных $e,f\in E$ положим

$$H(e,f)=\{x\in S|xx^{-1}=e\ \ \&\ \ x^{-1}x=f\},\quad H(e)=H(e,e).$$

Ответ на гипотезу Б.М. Бокало [5] в классе компактных инверсных полугрупп с открытыми сдвигами оказывается положительным.

Теорема 4. *Компактная топологическая инверсная полугруппа с открытыми правыми (левыми) сдвигами, с первой аксиомой счетности метризуема.*

Доказательство. Пусть полугруппа S удовлетворяет условию теоремы. Для каждой пары $e,f\in E$, если $H(e,f)\neq\varnothing$, то подпространство $H(e,f)$ гомеоморфно подгруппе $H(e)$ с первой аксиомой счетности, и, следовательно $H(e,f)$ – метризуемый компакт.

Таким образом, S – счетное обьединение метризуемых компактов вида $H(e,f)$, и по теореме А.В. Архангельского ([2], теорема 3.1.20) S – метризуемый компакт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т.1. – М.: Мир, 1972. 288с.; Т.2. – М.: Мир, 1972. 424с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. 752с.
3. Hofmann K.H., Mislove M., Stralka A. The Pontryagin duality of compact 0-dimensional semilattices and its applications. Lect. Notes Math., 1974, 394, XVI, 122p.
4. Чобан М.М., Додон Н.К. Теория $\mathcal{P}$-разреженных пространств. – Кишинев: Штиинца, 1979. 100с.
5. Гуран I.Й. *Метризовнiсть компактних iнверсних пiвгруп* // Алгебра i топологiя. – К.: 1993, С.33–40.

Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины

Наукова 3б, Львов, 290053, Украина

Получено 1.11.95.