

ВЛОЖЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП В ПРОСТЫЕ

О.В. ГУТИК

ABSTRACT. O. Gutik, *Embedding of topological semigroups in simple semigroups* // Matematychni Studii. **3** (1994) 10–14.

Any topological (inverse) semigroup is embedded into a simple topological (inverse) semigroup. The Bruck semigroup of a topological inverse semigroup with minimal idempotent admits the only direct sum topology.

В алгебраической теории полугрупп известна следующая конструкция Брака вложения произвольной полугруппы в простую полугруппу с единицей [1], [2, стр. 139-140]. Пусть S – полугруппа, $a, b \notin S$. Полугруппа $\mathcal{C}(S)$ порождается множеством $S \cup \{a, b\}$, и задается определяющими соотношениями $ab = 1$, $as = a$, $sb = b$ для всех $s \in S$, а также соотношениями, выполняющимися в S . Единицей полугруппы $\mathcal{C}(S)$ является или единица полугруппы S , если $1 \in S$, или присоединенная обычным образом к $\mathcal{C}(S)$ единица, если S не содержит единицы. Полугруппу $\mathcal{C}(S)$, построенную таким образом, будем называть полугруппой Брака на S . Каждый элемент полугруппы $\mathcal{C}(S)$ единственным образом представляется в виде $b^i t a^j$, где $t \in S \cup \{1\}$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$. Полугруппа S алгебраически вкладывается в $\mathcal{C}(S)$ и $\mathcal{C}(S)$ – простая полугруппа.

Цель настоящей статьи – распространить указанную конструкцию на топологические полугруппы. Для топологических инверсных полугрупп S , обладающих минимальным идемпотентом, топология прямой суммы на $\mathcal{C}(S)$ оказывается единственной среди топологий τ , индуцирующих на S исходную, и таких, что $(\mathcal{C}(S), \tau)$ – топологическая инверсная полугруппа. Приведен пример, показывающий, что условие существования минимального идемпотента – существенное.

Теорема 1. *Произвольная топологическая полугруппа топологически изоморфно вкладывается в простую топологическую полугруппу с единицей.*

Доказательство. Пусть (S, τ) – топологическая полугруппа. На $\mathcal{C}(S)$ определим топологию τ^* следующим образом. Пусть \mathcal{B} – база топологии τ на S . Рассмотрим семейство $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = \{b^i U a^j \mid U \in \mathcal{B}, i, j \in \mathbb{Z}_+\}$ подмножеств в $\mathcal{C}(S)$. Тогда $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ – база топологии τ^* на $\mathcal{C}(S)$, так как выполняются условия (B1)–(B2) [3]. Покажем, что τ^* – полугрупповая топология на $\mathcal{C}(S)$. Пусть s и t произвольные элементы из S . Так как

S – топологическая полугруппа, то для произвольной окрестности $U(st)$ существуют окрестности $U_1(s)$ и $U_2(t)$ такие, что

$$U_1(s)U_2(t) \subseteq U(st).$$

Пусть $b^i sa^j$ и $b^k ta^l$ – произвольные элементы из $\mathcal{C}(S)$. Рассмотрим возможные случаи.

- (1) $j = k$, $b^i sa^j \cdot b^k ta^l = b^i sta^l$.
Тогда $b^i U_1(s)a^j \cdot b^k U_2(t)a^l \subseteq b^i U(st)a^l$.
- (2) $j < k$, $b^i sa^j \cdot b^k ta^l = b^{i+k-j} ta^l$.
Тогда $b^i U_1(s)a^j \cdot b^k U_2(t)a^l \subseteq b^{i+k-j} U(t)a^l$.
- (3) $j > k$, $b^i sa^j \cdot b^k ta^l = b^i sa^{l+j-k}$.
Тогда $b^i U_1(s)a^j \cdot b^k U_2(t)a^l \subseteq b^i U(s)a^{l+j-k}$.

Таким образом операция умножения непрерывна в топологии τ^* .

Инверсную полугруппу S , наделенную топологией, будем называть топологической инверсной полугруппой, если умножение и инверсия непрерывны относительно этой топологии.

Следствие 1. *Произвольная топологическая инверсная полугруппа топологически изоморфно вкладывается в простую топологическую инверсную полугруппу с единицей.*

Доказательство. Пусть (S, τ) – топологическая инверсная полугруппа. По теореме 8.48 [2], $\mathcal{C}(S)$ – инверсная полугруппа, а по теореме 1 – топологическая полугруппа. Так как (S, τ) – топологическая инверсная полугруппа, то для произвольной окрестности $U(s)$ существует окрестность $V(s^{-1}) \subset (U(s))^{-1}$ такая, что $(V(s^{-1}))^{-1} \subset U(s)$. Тогда для произвольной окрестности $b^i U(s)a^j$ выполняется включение $(b^j V(s^{-1})a^i)^{-1} \subset b^i U(s)a^j$.

Следствие 2. *Полугруппа (S, τ) – открыто-замкнутая подполугруппа в $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$. Пространство $(\mathcal{C}(S), \tau^*)$ гомеоморфно произведению $\mathbb{Z}_+ \times S \times \mathbb{Z}_+$, где \mathbb{Z}_+ – счетное дискретное пространство.*

Очевидно, что гомеоморфизм $\varphi : \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathbb{Z}_+ \times S \times \mathbb{Z}_+$ можно определить следующим образом: $\varphi(b^i sa^j) = (i, s, j)$.

Предложение. *Произвольная метризуемая топологическая (инверсная) полугруппа изоморфно и изометрически вкладывается в простую метризуемую топологическую (инверсную) полугруппу с единицей.*

Если d – метрика на S , то, очевидно, что на $\mathcal{C}(S)$ метрику d^* можно определить следующим образом

$$d^*(b^i sa^j, b^k ta^l) = d(s, t) + |i - k| + |j - l|.$$

Эта метрика, очевидно, порождает ранее построенную топологию τ^* на $\mathcal{C}(S)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задано семейство $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ попарно не пересекающихся топологических пространств. Рассмотрим множество $X = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и семейство τ всех множеств $U \subset X$ таких, что $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha \in A$. Множество X с топологией τ называется суммой пространств $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и обозначается $\bigoplus\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Топология τ на X называется топологией прямой суммы.

Далее S — топологическая инверсная полугруппа. Через $E(S)$ обозначим подполугруппу идемпотентов полугруппы S , а через x^{-1} — элемент, инверсный элементу x . Для произвольных $i, j \in \mathbb{Z}_+$ пусть $S_{i,j} = \{b^i s a^j \mid s \in S\}$.

Окрестность $U(e)$, $e \in E(S)$, называется симметрической, если $x \in U(e) \Rightarrow x^{-1} \in U(e)$.

Теорема 2. Пусть (S, τ) — топологическая инверсная полугруппа, $\mathcal{C}(S)$ — полугруппа Брака на S . $\tilde{\tau}$ — топология на $\mathcal{C}(S)$ такая, что выполняются следующие условия

- (1) $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ — хаусдорфова топологическая инверсная полугруппа;
- (2) $\tilde{\tau}|_S = \tau$.

Тогда, если S — полугруппа с минимальным идемпотентом, то

$$\mathcal{C}(S) = \bigoplus\{S_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. Пусть S — топологическая инверсная полугруппа. Тогда для произвольного $e \in E(S)$ существует база симметричных окрестностей точки e .

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}(e)$ — база топологии в точке $e \in E(S)$ и $U(e) \in \mathcal{B}(e)$. Существует окрестность $V(e)$ такая, что $V(e)V(e) \subset U(e)$. Положим $O(e) = V(e) \cap (V(e))^{-1}$. Семейство симметрических окрестностей точки e , построенное таким образом, удовлетворяет условиям (BP1)–(BP2) [3], и, следовательно, определяют базу топологии в точке e .

Лемма 2. Пусть $e \in E(\mathcal{C}(S))$ и $e \in S_{i,i}$. Тогда существует окрестность $U(e)$ такая, что $U(e) \cap S_{j,j} = \emptyset$ для всех $j > i$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Положим $e^0 = b^{i+1} a^{i+1}$, тогда $e e^0 = e^0$. Допустим, что все окрестности точки e пересекаются с множеством $\bigcup\{S_{j,j} \mid j > i\}$. Так как $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ — топологическая инверсная хаусдорфова полугруппа, то для каждой окрестности $U(e^0)$ существуют окрестности $V(e)$ и $W(e^0)$ такие, что $V(e) \cap W(e^0) \subset U(e^0)$, причем $V(e) \cap W(e^0) = \emptyset$ и $V(e) \cap U(e^0) = \emptyset$. Но последнее равенство не выполняется, так как для произвольного $x \in V(e) \cap (\bigcup\{S_{j,j} \mid j > i\})$ имеем $x e^0 = x \notin U(e^0)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. Пусть $e \in E(\mathcal{C}(S))$, $e \in S_{i,i}$ и $e \neq b^i a^i$. Тогда существует окрестность $U(e)$ такая, что $U(e) \cap S_{j,j} = \emptyset$ для всех $j < i$, $i, j \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $h(x) = x b^i a^i$. Для всех $s \in S$ и $j < i$ $b^j s a^j b^i a^i = b^i a^i$. Пусть $U(e)$ — произвольная окрестность идемпотента e . Множество $h^{-1}(b^i a^i)$ замкнуто в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ и $e \notin h^{-1}(b^i a^i)$, следовательно $O(e) = U(e) \setminus h^{-1}(b^i a^i)$ — открытая окрестность точки e и $O(e)$ не содержит идемпотентов из $S_{j,j}$, $j < i$.

Лемма 4. Пусть S – полугруппа с минимальным идемпотентом, тогда для произвольного $i \geq 1$ существует окрестность $U(b^i a^i)$, не пересекающаяся с $S_{j,j}$, $j < i$.

Доказательство. Пусть e^0 – минимальный идемпотент полугруппы S . Положим $e_0 = b^{i-1} e^0 a^{i-1}$ и $e = b^i a^i$, тогда $e_0 e = e$. Пусть $U(e)$ – произвольная окрестность точки e . Множество $h^{-1}(e_0)$ замкнуто в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$ и $e \notin h^{-1}(e_0)$. Следовательно, $O(e) = U(e) \setminus h^{-1}(e_0)$ – открытая окрестность точки e . По лемме 1, существуют симметрические окрестности $\tilde{O}(e)$ и $W(e)$ такие, что $\tilde{O}(e) \subset O(e)$, $\tilde{O}(e) \cap S_{j,j} = \emptyset$ для произвольного $j < i$, и $W(e)W(e) \subset \tilde{O}(e)$, $W(e) \cap S_{j,j} = \emptyset$ для всех $j < i$. Если $W(e) \cap (\cup\{S_{j,j} \mid j < i\}) \neq \emptyset$, то существует $x \in W(e) \cap S_{j,j}$, следовательно $x^{-1} \in S_{j,j}$, что противоречит тому, что $W(e)W(e) \subset \tilde{O}(e)$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $e \in E(\mathcal{C}(S))$, $e \in S_{i,i}$ и существует окрестность идемпотента e , не пересекающаяся с $S_{j,j}$ для всех $j \neq i$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Тогда существует окрестность $U(e)$ такая, что $U(e) \subset S_{i,i}$.

Доказательство. Предположим, что для всех окрестностей $U(e)$ таких, что $U(e) \cap (\cup\{S_{j,j} \mid j \neq i\}) = \emptyset$ выполняется $U(e) \not\subset S_{i,i}$. Зафиксируем окрестность $U(e)$. По лемме 1, выберем такую симметрическую окрестность $O(e)$, что $O(e)O(e) \subset U(e)$ и $O(e) \subset S_{i,i}$. Если $O(e) \not\subset S_{i,i}$ и $O(e)$ – симметрическая окрестность, тогда существует точка $x \in O(e) \setminus S_{i,i}$ такая, что $x^{-1} \in O(e)$. Поскольку $xx^{-1}, x^{-1}x \in U(e)$, $xx^{-1}, x^{-1}x$ – идемпотенты, то $xx^{-1}, x^{-1}x \in S_{i,i}$, но это невозможно потому, что если $xx^{-1} \in S_{i,i}$, то $x = b^i s a^k$ ($s \in S$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $k \neq i$) и $x^{-1}x = b^k s^{-1} s a^k \notin S_{i,i}$, или если $x^{-1}x \in S_{i,i}$, то $x = b^k s a^i$ и $xx^{-1} = b^k s s^{-1} a^k \notin S_{i,i}$. Противоречие. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Из лемм 2–5 следует, что множество $E(S_{i,i})$ открыто в $E(\mathcal{C}(S))$ для каждого $i \in \mathbb{Z}_+$. Ретракции $\varphi(x) = xx^{-1}$ и $\psi(x) = x^{-1}x$ непрерывны в $(\mathcal{C}(S), \tilde{\tau})$, и, следовательно, множества $S_{i,j}$ ($i, j \in \mathbb{Z}_+$) открыто-замкнуты, так как $S_{i,j} = \varphi^{-1}(E(S_{i,i})) \cap \psi^{-1}(E(S_{j,j}))$. Таким образом, $\tilde{\tau}$ – топология прямой суммы.

Из доказанной теоремы следует, что на бициклической полугруппе (как инверсной) существует только дискретная полугрупповая топология. Ранее этот результат был получен в работе [4, следствие 1.2]. Следующий пример показывает, что существование минимального идемпотента в S – существенное условие.

ПРИМЕР. Пусть $S = ([0, 1[, \max)$ – полугруппа с естественной топологией τ . В точках вида $b^i a^j$ ($i, j \in \mathbb{N}$) в полугруппе $\mathcal{C}(S)$ можно ослабить топологию τ^* до полугрупповой, следующим образом. Для всех $i, j \in \mathbb{N}$ пусть $\mathcal{B}(b^i a^j) = \{U_\varepsilon \mid U_\varepsilon = b^i U a^j \cup b^{i-1}([1 - \varepsilon, 1[)a^{j-1}$, где U – элемент базы топологии τ в точке 0 и $\varepsilon \in]0, 1[$) – база топологии τ_1 на $\mathcal{C}(S)$ в точках $b^i a^j$, а в остальных точках базы топологий τ_1 и τ^* совпадают. Очевидно, что τ_1 слабее τ^* . Покажем, что топология τ_1 на $\mathcal{C}(S)$ полугрупповая. Очевидно, что достаточно показать, что умножение в $(\mathcal{C}(S), \tau_1)$ непрерывно в следующих трех случаях:

- (1) $b^i a^j \cdot b^k a^l$, $i, j, k, l \in \mathbb{N}$;
- (2) $b^i a^j \cdot b^k s a^l$, $i, j, k, l \in \mathbb{N}$, $s \in S$;
- (3) $b^k s a^l \cdot b^i a^j$, $i, j, k, l \in \mathbb{N}$, $s \in S$.

Так как (S, τ) – топологическая полугруппа, то для произвольной окрестности $W(e_f)$ точки ef существуют окрестности $V(e)$ и $U(f)$ точек e и f соответственно, такие, что $V(e)U(f) \subset W(e_f)$.

Рассмотрим три вышеупомянутых случая.

$$(1) \quad b^i a^j \cdot b^k a^l = \begin{cases} b^{i+k-j} a^l, & \text{если } j \leq k; \\ b^i a^{l+j-k}, & \text{если } j > k. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } U_\varepsilon(b^i a^j) \cdot U_\varepsilon(b^k a^l) \subset U_\varepsilon(b^i a^j \cdot b^k a^l).$$

$$(2) \quad b^i a^j \cdot b^k s a^l = \begin{cases} b^{i+k-j} s a^l, & \text{если } j \leq k; \\ b^i a^{l+j-k}, & \text{если } j > k. \end{cases}$$

Тогда

$$\text{а) если } j \leq k, \text{ то } V_\varepsilon(b^i a^j) \cdot b^k U(s) a^l \subset b^{i+k-j} U(s) a^l,$$

$$\text{б) если } j > k, \text{ то } V_\varepsilon(b^i a^j) \cdot b^k U(s) a^l \subset V_\varepsilon(b^i a^{j+l-k}).$$

$$(3) \quad b^k s a^l \cdot b^i a^j = \begin{cases} b^{i+k-l} a^l, & \text{если } l < i; \\ b^k s a^{l+j-i}, & \text{если } l \geq i. \end{cases}$$

Тогда

$$\text{а) если } l < i, \text{ то } b^k V(s) a^l \cdot U_\varepsilon(b^i a^j) \subset U_\varepsilon(b^{i+k-l} a^l);$$

$$\text{б) если } l \geq i, \text{ то } b^k V(s) a^l \cdot U_\varepsilon(b^i a^j) \subset b^k V(s) a^{j+l-i}.$$

Непрерывность инверсии также достаточно показать в точках вида $b^i a^j$ ($i, j \in \mathbb{N}$). Имеем $(U_\varepsilon(b^i a^j))^{-1} \subset U_\varepsilon(b^j a^i)$ для произвольных $\varepsilon \in]0, 1[$, $i, j \in \mathbb{N}$. Таким образом $(\mathcal{C}(S), \tau_1)$ – топологическая инверсная полугруппа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Bruck R.H. *A survey of binary systems* // Ergebnisse der Math.. Heft 20, Berlin: Springer, 1958.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. т.2. – М.: Мир, 1972. – 285 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
4. Eberhart C., Selden J. *On the closure of the bicyclic semigroup* // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V.144. P.115–126.

Department of Mathematics and Mechanics, Lviv University, Universytetska 1, Lviv, 290602, Ukraine

Поступила 2.12.1993